

**THESE**

**présentée**

**devant l'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1**

**pour l'obtention**

**du DIPLOME DE DOCTORAT**

**(arrêté du 7 août 2006)**

**présentée et soutenue publiquement le**

**par**

**M. Mohamed HOUKARI**

**TITRE :**

**Mesure du risque et couverture des marges nettes de taux d'intérêt des ressources non échéancées – Application aux dépôts à vue en ALM bancaire.**

**Directeur de thèse : M. le Professeur Jean-Paul LAURENT**

**JURY :**

**M. le Professeur Jean-Claude AUGROS  
M. le Professeur Jean-Paul LAURENT  
M. le Professeur Olivier SCAILLET  
M. Alexandre ADAM  
M. le Professeur Jean-Charles ROCHET  
M. le Professeur Rama CONT, rapporteur  
M. Michel CROUHY, rapporteur**

# Remerciements

# Table des matières

<b>Remerciements .....</b>	<b>2</b>
<b>Table des matières .....</b>	<b>3</b>
<b>Introduction générale.....</b>	<b>6</b>
1. Présentation et contexte de l'ALM bancaire .....	7
2. Mesures de risque et optimisation de portefeuille.....	7
3. Couverture des marges nettes de taux d'intérêt sur les ressources non échéancées .....	8
<b>Partie I - Présentation et contexte de l'ALM bancaire .....</b>	<b>10</b>
Chapitre 1. Introduction – Le bilan bancaire : <i>Banking Book / Trading Book</i> .....	12
Chapitre 2. Les risques financiers .....	16
1. Le risque de contrepartie .....	16
2. Le risque de liquidité.....	17
3. Le risque global de taux d'intérêt.....	18
4. Le risque de marché .....	19
5. Risque de « business » et risque opérationnel.....	19
6. Le rôle des fonds propres .....	20
7. L'allocation des fonds propres .....	21
Chapitre 3. L'environnement réglementaire .....	23
1. Vue d'ensemble du contexte réglementaire .....	23
2. Les accords de Bâle II .....	23
a. Etat actuel de l'application des accords de Bâle II.....	24
b. Le Capital Économique – principes généraux.....	26
3. Approches réglementaires du risque de taux d'intérêt global .....	26
4. Référentiels et normes comptables.....	31
b. L'IAS 39 : classification des produits financiers .....	31
c. Instruments dérivés et modes de couverture en IAS 39 .....	32
Chapitre 4. Organisation de la gestion interne des risques .....	34
1. L' ALM – Asset and Liability Management .....	34
a. Le rôle de l'ALM.....	34
b. Mesure de marge et de valeur en ALM.....	34
c. L'éclatement notionnel de l'activité de l'établissement.....	37
2. Le Risk Management .....	38
3. L'audit interne – l'inspection générale.....	39
Chapitre 5. La mise en œuvre de l'ALM .....	41
1. Une organisation hiérarchique .....	41
2. Le processus de décision .....	42
3. Les indicateurs de gestion .....	43
4. Les systèmes d'information .....	44
<b>Partie II - Mesures de risque et optimisation de portefeuille.....</b>	<b>45</b>
Introduction .....	46
Chapitre 6. Mesure du risque – Aspects Théoriques.....	48
1. Préliminaires et notations .....	48
2. Théorie de la mesure du risque – Les principales approches.....	51

3. Propriétés et représentation des mesures de risque .....	62
Chapitre 7. Mesures de risque et optimisation de portefeuille .....	71
1. Rappel des notations – Estimation des mesures de risque .....	71
2. Optimisation de portefeuille et mesures de risque convexes .....	74
3. Optimisation de portefeuille et mesures basées sur les moments .....	75
4. Optimisation de portefeuille et mesures spectrales de risque .....	78
5. Quelques remarques sur l'optimisation sous contrainte de Value-at-Risk .....	83
6. Application à la création de portefeuilles optimaux de Hedge Funds.....	83
<b>Partie III - Couverture des marges nettes de taux d'intérêt sur les ressources non</b>	
<b>échéancées .....</b>	<b>94</b>
Introduction .....	95
Chapitre 8. Dépôts et comptes d'épargne – Une revue des offres à travers le monde.....	97
1. Caractéristiques .....	97
2. Les enjeux de la modélisation des ressources non échéancées .....	108
3. Une courte revue de la littérature .....	112
Chapitre 9. Modélisation de l'écoulement des ressources non échéancées – Une	
appréhension du comportement de la clientèle .....	115
1. Objectifs du modèle – Rappel sur les notions d'échéanciers .....	115
2. Le taux de clôture en nombre de comptes.....	117
Chapitre 10. Un modèle de couverture des marges nettes de taux d'intérêt .....	125
1. Objectifs – Contexte.....	125
2. Le modèle.....	127
3. Détermination des stratégies optimales.....	132
4. Comparaison et robustesse des stratégies d'investissement.....	136
<b>Conclusion.....</b>	<b>143</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>144</b>
Partie I. Présentation et contexte de l'ALM bancaire. ....	144
Partie II. Mesures de risque et optimisation de portefeuille.....	144
Partie III. Couverture des marges nettes de taux d'intérêt sur les ressources non échéancées.	
.....	147
<b>Annexes .....</b>	<b>150</b>
Annexe A : Propriétés et résultats de représentation des mesures de risque – Preuves. ....	150
1. Mesures de risque cohérentes et invariants en loi : comparaison avec l'espérance de	
rendement.....	150
2. Compatibilité de l'Expected Shortfall et des mesures spectrales de risque avec la	
dominance stochastique du second ordre.....	151
3. Représentation par scénarios généralisés des mesures spectrales de risque .....	154
Annexe B : Stratégies admissibles, <i>Hedging Numéraire</i> et résolution des programmes	
d'optimisation statique et dynamique (Partie III) .....	156
1. <i>Hedging Numéraire</i> et mesure de probabilité variance minimale.....	156
2. Optimisation statique moyenne-variance – Détermination des stratégies optimales.	160
3. Optimisation dynamique moyenne-variance – Détermination de la stratégie optimale	
.....	162
Annexe C : Estimation des paramètres de modèle sur différents marchés (encours de dépôts	
et taux de rémunération) (Partie III).....	170
1. Estimations des paramètres du modèle de diffusion des encours .....	170
2. Estimations du paramètre de corrélation.....	171

3. Modélisation du taux de rémunération des ressources.....	171
Annexe D : Données issues des rapports par établissement à la <i>Securities and Exchange Commission</i> (Partie III) .....	173
1. Statistiques descriptives de l'échantillon choisi.....	173
2. Pouvoir prédictif des sensibilités <i>ex ante</i> .....	174

## Introduction générale

La banque d'aujourd'hui est une entité aux interfaces multiples : depuis l'intégration de la banque d'affaires et de la banque de détail, depuis l'adjonction de métiers d'assurance, en France notamment, les établissements sont devenus très éclectiques dans leur offre, très diversifiés dans les métiers qu'ils abritent et par conséquent extrêmement complexes et ramifiés. Dans ce contexte, l'activité d'intermédiation bancaire a vu se multiplier les moyens disponibles en termes de modes de financement et de placement, et de couverture des risques. Alors qu'aujourd'hui la banque se situe à l'interface entre des milieux de plus en plus hétérogènes, la Gestion Actif Passif (GAP ou ALM) bancaire, dont le cœur de métier est la gestion de ces multiples interfaces, doit faire face à des problématiques de plus en plus diverses.

En fait, comme beaucoup d'autres départements d'une banque, l'ALM a un objectif de rendement dans certaines limites de risque. Cependant, à la différence de l'essentiel des autres services, les sous-jacents ne sont pas dans une proportion quasi intégrale des produits financiers négociables, mais des produits octroyés par des commerciaux de banque de détail ou d'affaires et des filiales, et les contreparties ne sont pas constituées essentiellement d'établissements financiers et d'institutions, mais, via le réseau et les filiales, d'une clientèle beaucoup plus hétérogène, qui s'étend du grand public aux commerçants et aux grandes entreprises. Entre autres à cause de cela, l'identification et la quantification des risques financiers, la détermination de l'objectif à réaliser, la bonne utilisation des moyens disponibles pour y parvenir sont autant de sujets existant déjà en finance de marché, qui prennent une forme particulière dans le cas du métier d'ALM.

Les enjeux sont relativement importants pour les établissements financiers. Par exemple, la banque de détail constitue depuis longtemps une source de revenus stable et pérenne pour les établissements et le marché attache une grande importance à leur capacité à conserver cette caractéristique. D'autre part, des postes comme les dépôts de la clientèle constituent autant de ressources de liquidité disponibles à moindre coût et ce n'est pas un point à négliger dans le contexte particulièrement tendu de la crise de liquidité des *subprimes*. Nous pouvons mentionner également que la banque de détail (via l'implantation d'une filiale ou l'acquisition d'un réseau présent localement) est en général le premier jalon qu'un établissement pose lorsqu'il s'investit dans un nouveau marché. De plus, à l'heure actuelle, les banques comptent particulièrement sur les marchés émergents pour relancer une activité de banque de détail à croissance modérée sur leur territoire résident.

Dans cette thèse, nous proposons de nous intéresser à un sujet assez caractéristique des questions soulevées par le métier d'ALM, qui est la gestion du risque de taux d'intérêt sur les ressources non échéancées. Ainsi, dans un premier temps, nous proposons une partie de nature introductive, dans laquelle nous rappelons les missions actuelles de l'ALM bancaire, l'environnement bancaire dans lequel elle évolue ainsi que sa place et ses interactions dans l'organisation d'un établissement bancaire. Dans une seconde partie, nous nous intéressons d'un point de vue un peu plus théorique à la mesure du risque, en étudiant les propriétés et les modes de représentation de différentes classes de mesures. Ainsi, l'application à l'optimisation de portefeuille que nous proposons dans cette même partie a pour objet de permettre la comparaison entre les différentes mesures présentées. Après avoir posé ces bases, la dernière partie de cette thèse revient sur le problème de couverture des marges de taux d'intérêt sur les ressources non échéancées : nous y précisons le contexte et les problèmes

soulevés par la gestion de ce type de poste, l'objectif à atteindre et les risques sous-jacents. Finalement, nous y développons un modèle de détermination de stratégies de couverture.

## **1. Présentation et contexte de l'ALM bancaire**

Dans la première partie de cette thèse, nous évoquerons la mission de l'ALM bancaire, notamment les risques financiers qu'elle prend en charge, puis l'environnement réglementaire dans lequel elle évolue et sa place dans l'organisation interne.

Dans le bilan comptable d'une banque, on distingue le *Banking Book*, partie consacrée au bilan des ressources et emplois liés à la clientèle et aux opérations clientèle des filiales, c'est-à-dire la « sphère opérationnelle », et le *Trading Book*, concentré sur la sphère financière (cf. Chapitre 1). L'ALM a une mission centrée essentiellement sur la partie *Banking Book*, puisqu'elle se situe au contact du réseau de banque de détail et des filiales.

Le métier d'ALM, comme la quasi-totalité des métiers composant une banque, comporte une partie consacrée à la gestion des risques, notamment des risques de taux d'intérêt et de liquidité. Nous évoquons également la présence d'un risque de « business », lié à toutes sortes d'actions de la concurrence, de mouvements de la clientèle indépendants de facteurs de marché, qui pourraient influencer sur les revenus de l'activité d'intermédiation. Nous rappelons dans le Chapitre 2 la définition et la forme sous laquelle ces différents types de risque se manifestent en ALM. Dans notre cas, c'est la gestion du risque de taux d'intérêt global qui nous intéresse plus particulièrement et nous proposons de revenir sur les indicateurs utilisés en ALM, parmi lesquels l'impasse de taux d'un côté et la sensibilité de valeur actuelle nette et de marge de l'autre. Nous évoquons également le cas des fonds propres, éléments matérialisant l'ampleur des risques contenus dans chaque activité et nécessaires à leur bon fonctionnement, ce qui fait du problème de l'allocation des fonds propres par pôle / activité un sujet hautement stratégique.

Dans le Chapitre 3, nous évoquons le contexte réglementaire dans lequel les banques évoluent et qui encadre en particulier les actions de l'ALM. L'application du Pilier II des accords de Bâle II comporte effectivement une série de mesures concernant la gestion des risques de taux d'intérêt global et de liquidité, notamment en matière d'allocation et de calcul de capital économique, d'indicateurs de valeur et de sensibilité et de simulation de scénarios de crise (*stress testing*). A cela il faut ajouter un cadre comptable récemment modifié, celui des nouvelles normes IFRS/IAS. Dans ce contexte, la comptabilisation des produits du bilan et de leurs couvertures est soumise à des règles plus ou moins précises, mais qui ont une influence certaine sur les chiffres communiqués au marché. Ce sont des faits que l'ALM se doit d'intégrer dans l'élaboration de ses pratiques de gestion.

A la complexité des problèmes posés s'ajoute, à l'intérieur des banques, une multiplicité des interlocuteurs. Dans le Chapitre 4 nous revenons ainsi sur la place de l'ALM dans l'organisation, sur les services avec lesquels elle interagit et sur la nature de ces interactions. Nous revenons également dans le Chapitre 5 sur les processus de mise en œuvre de l'ALM.

## **2. Mesures de risque et optimisation de portefeuille**

La seconde partie de cette thèse est consacrée aux mesures de risque et propose, pour l'étude de ces mesures, une application à l'optimisation de portefeuille.

Dans le Chapitre 6, nous étudions différentes classes de mesures de risque : celles basées sur les moments, certaines mesures de déviation et celles basées sur les quantiles. Nous proposons de les examiner d'un point de vue axiomatique puis d'énoncer quelques résultats de représentation et de compatibilité avec les ordres stochastiques. La littérature scientifique s'étoffant de jour en jour sur le sujet, la plupart des résultats existent déjà, sous des formes différentes. Néanmoins, nous proposons ici une approche et des résultats de représentation adaptés à l'optimisation de portefeuille.

Le problème d'optimisation de portefeuille sous contrainte de mesure de risque est un sujet bien connu notamment en gestion d'actifs, où il trouve bon nombre d'applications. Dans le Chapitre 7, nous proposons de récapituler et d'énoncer, sous une forme quasiment prête à implémenter, les problèmes d'optimisation, pour chaque « type » de mesure de risque intervenant dans la contrainte. Nous effectuons également une application numérique portant sur la détermination de portefeuilles optimaux, avec des données de rendements de *Hedge Funds*. Notons que le choix de ce type d'actifs porte essentiellement sur la nature de leur distribution, non gaussienne, ce qui nous permet, comme nous le verrons, de ne pas aboutir à des trivialités en termes d'allocations optimales. Cette étude est pour nous l'occasion d'étudier le comportement des différentes mesures de risque par rapport aux allocations efficaces correspondantes. Nous montrons alors dans cette section que les profils d'allocation en fonction de la cible de rendement sont en réalité très proches, à moins d'avoir recours à des mesures de risque extrêmement sévères, portant sur les queues de distribution des rendements de portefeuille.

### **3. Couverture des marges nettes de taux d'intérêt sur les ressources non échéancées**

Dans cette dernière partie, forts du contexte posé en Partie I et de l'étude sur les mesures de risque de la Partie II, nous revenons sur le problème de couverture des marges sur les ressources non échéancées.

Le Chapitre 8 est l'occasion pour nous de faire un tour d'horizon de ce que regroupent les ressources non échéancées, en observant différents marchés : dépôts à vue, comptes d'épargne, etc. Nous proposons une étude particulière des marchés américain et européen (Zone Euro : France, Allemagne, Italie), puis de certains marchés émergents (Maroc, Ukraine, Turquie). Nous discutons également des enjeux de la modélisation des ressources non échéancées, par le biais d'une revue de la littérature scientifique sur le sujet, mettant en évidence les éléments que nous allons prendre en compte dans l'énoncé du problème d'optimisation qui se pose à l'ALM. En particulier, nous revenons sur la dichotomie marge / valeur, en montrant que le choix du critère va, dans la pratique et dans l'environnement comptable actuels, à la réduction de la dispersion des marges.

La modélisation des ressources non échéancées dépend des bases de données disponibles. L'apparition récente, au niveau ALM centrale, de bases de données « par génération » et « unitaires » a permis le développement de modèles comportementaux plus fins. Dans le Chapitre 9, nous revenons sur ce point en nous intéressant spécifiquement aux phénomènes de clôture de comptes parmi la clientèle et énonçons plusieurs méthodes d'estimation du taux de clôture sur un parc de comptes. Nous nous intéressons également à la question de la modélisation de l'encours par compte, élément observable sur des bases de données suffisamment précises. Cette grandeur porte en elle une dépendance en taux du fait que les

clients auront tendance à effectuer des transferts entre comptes suivant l'évolution des conditions de rémunération, mais nous verrons que la seule contingence en taux ne suffit pas à expliquer les orientations de la clientèle.

Enfin, tout ceci nous permet d'aboutir à un programme d'optimisation à résoudre pour l'ALM. Le cadre du Chapitre 10 est donc celui d'un modèle de diffusion des encours prenant en compte un facteur de risque de marché lié aux mouvements des taux et un facteur orthogonal, représentant un risque de « business ». Nous proposons alors une modélisation des taux incorporant une prime de risque rémunérant l'investissement à long terme, représentative de la problématique risque / rendement dans laquelle se placent les gestionnaires ALM. Ainsi nous déterminons et comparons des stratégies optimales statiques et dynamiques de minimisation de la variance de la marge avec couverture. En revenant à des critères de risque un peu plus récents que la variance, nous montrons, comme en Partie II, que les stratégies optimales de couverture affichent des performances très proches en VaR ou en Expected Shortfall.

## **Partie I - Présentation et contexte de l'ALM bancaire**

## Chapitre 1. Introduction – Le bilan bancaire : *Banking Book* / *Trading Book*

Les établissements financiers se situent à l'interface entre deux mondes qui diffèrent en termes de produits, d'équipes qui y évoluent, de mode de fonctionnement, etc. Il s'agit des sphères opérationnelle et financière dont les comptes sont tenus respectivement dans le *Banking Book* et le *Trading Book* :

- le *Banking Book* comprend l'ensemble des opérations avec la clientèle particulière et les entreprises ; il concerne principalement le réseau et la direction commerciale de l'établissement financier ; les produits qui y sont comptabilisés sont classiquement des dépôts, des crédits, des produits d'épargne, etc. ;
- le *Trading Book* traite des relations avec les institutionnels ; entretient dans ce cadre par exemple les relations interbancaires, avec les institutionnels, les compagnies d'assurance. Les produits traités par le Trading Book sont les crédits, les titres de marché, les instruments dérivés, etc. Il rend compte de l'activité de marché de l'établissement financier ainsi que de son activité de portefeuille (typiquement, la détention de titres par la banque).

Le Tableau 1.1 ci-dessous résume schématiquement la division que nous venons de présenter.

	Actif	Passif
<b>BILAN</b>	<p>Avances diverses Crédits aux entreprises Crédits immobiliers classiques Crédits à la consommation</p> <p>Crédits d'épargne logement</p> <p>Titres de transaction, de placement et d'investissements Titres de participation et de filiales Immobilisations</p>	<p>Ressources à vue Comptes à terme Bons de caisse et épargne Livrets (livrets B, LDD ex-CODEVI, etc.) Plans d'épargne populaire</p> <p>Epargne logement (CEL, PEL)</p> <p>Titres de créances négociables (TCN) Emprunts obligataires Titres subordonnés Fonds propres Résultat</p>
<b>HORS-BILAN</b>	<p>Garanties données Contrats de garantie de taux fermes Contrats de garantie de taux optionnels</p>	<p>Garanties reçues Contrats de garantie de taux fermes Contrats de garantie de taux optionnels</p>

**Tableau 1.1. Bilan simplifié d'une banque.** Bilan / Hors-bilan ; Actif / Passif. En foncé, la sphère opérationnelle (*Banking Book*) ; en blanc, la sphère financière (*Trading Book*).

Le Tableau 1.2 donne un ordre de grandeur des différents postes du bilan, du point de vue des nouvelles normes comptables (cf. Section 3 plus loin) dites IFRS / IAS. Il contient des données agrégées sur les bilans des 8 principaux groupes bancaires français en 2006.

<i>(en milliards d'euros)</i>	<b>2006</b>	<b>Poids dans le bilan</b>	<b>Evolution par rapport à 2005</b>
<b>ACTIF</b>			
Actifs financiers à la juste valeur par résultat	1890,4	34,9%	8,5%
Instruments dérivés de couverture	43,2	0,8%	5,1%
Actifs financiers disponibles à la vente	619,5	11,4%	9,4%
Prêts et créances sur les établissements de crédit	728,9	13,4%	6,4%
Prêts et créances sur la clientèle	1693,2	31,2%	18,6%
Actifs financiers détenus jusqu'à l'échéance	57,1	1,1%	-2,5%
Autres	390,5	7,2%	4,5%
<b>PASSIF</b>			
Passifs financiers à la juste valeur par résultat	1423,5	26,3%	5,4%
Instruments dérivés de couverture	47,2	0,9%	1,2%
Dettes envers les établissements de crédit	717,9	13,2%	11,0%
Dettes envers la clientèle	1428,6	26,3%	9,5%
Dettes représentées par un titre	824,9	15,2%	26,6%
Provisions techniques des contrats d'assurance	443,6	8,2%	10,9%
Dettes subordonnées	80,7	1,5%	7,3%
Capitaux propres part du groupe	184,4	3,4%	18,7%
Autres	272,0	5,0%	3,4%
<b>TOTAL DE BILAN</b>	<b>5422,8</b>	<b>100,0%</b>	<b>11%</b>

**Tableau 1.2. Evolution du bilan consolidé des 8 principaux groupes français.** (Source : Rapport annuel 2006 de la Commission Bancaire)

La sphère financière se caractérise par des prix définis par les anticipations des intervenants de marché. On parle plus généralement de *prix de marché* (*mark-to-market*). Les produits peuvent également être évalués sur la base de modèles (*mark to model*). A ce propos, les produits dérivés ou structurés et les options incluses dans les produits de marché sont valorisés par l'utilisation de modèles mathématiques et de procédés de simulation. Le fonctionnement idéal fait se correspondre les deux notions, toutefois depuis la crise financière d'août 2007, des situations se sont produites où le marché des dérivés de crédit s'est retrouvé complètement déserté, le prix *mark-to-market*, fixé par un unique intervenant. Dans ce cas, les intervenants établissent leurs références sur la base de prix *mark-to-model*, une « rustine » qui ne pallie en rien les distorsions de prix dues à la désertification des marchés.

La sphère financière se caractérise également par un degré élevé d'information sur les contreparties, relativement à la sphère opérationnelle. La plupart des transactions sur la sphère financière se déroulent sur des marchés structurés et l'information disponible sur les différents intervenants est généralement bien plus détaillée que celle dont on peut disposer sur les contreparties de la sphère opérationnelle. Toutefois, les limites de la disponibilité de l'information sur la sphère financière portent sur la complexité des produits structurés. L'exemple de la crise récente des marchés de crédit nous a montré qu'il s'est échangé sur les marchés de crédit des produits (MBS, CDO de MBS, etc.) dont on connaissait très mal les sous-jacents, le processus de fabrication, et dont en particulier la notation seule ne suffisait plus à caractériser la qualité.

Par ailleurs, la sphère opérationnelle s'inscrit dans un cadre plus commercial dont la culture financière se réduit à une clientèle composée de particuliers, d'entreprises et de

« professionnels » (commerces, professions libérales, etc.). La qualité de l'information disponible sur les contreparties est faible, relativement au cas de la sphère financière, toutefois les produits sont plus simples. Une caractéristique importante de cette sphère est également la présence d'options cachées, derrière la simplicité des concepts intervenant dans la plupart des produits proposés. On fait souvent référence à l'option de remboursement anticipé dans les crédits, mais par exemple, un simple dépôt à vue laisse en réalité au client une palette d'options très riche, puisqu'on lui accorde la possibilité d'y transférer des fonds de manière instantanée, dans les deux sens, à tout moment. L'objet de la troisième partie de cette thèse est justement d'affiner la compréhension et la gestion du risque porté par ces options implicites.

D'une manière générale, l'actif se constitue de crédits de montants unitaires faibles, relativement à ce qui se pratique au sein de la sphère financière, hormis sur le périmètre des crédits aux entreprises, où les montants peuvent s'en rapprocher. Cette faiblesse des montants unitaires de crédit se retrouve compensée par l'important nombre d'opérations consenties par l'établissement financier dans le cadre de cette activité. En gestion, on s'intéresse à la définition de profils d'amortissement en capital des crédits : par exemple, dans un crédit à mensualité constante, le client consacre, échéance après échéance, une partie du montant versé au remboursement du capital, l'autre au paiement des intérêts, induisant un profil bien défini d'amortissement du capital. En gestion, cela permet à l'ALM, comme nous le verrons plus loin, de définir sa politique de refinancement en relation avec l'écoulement des crédits.

Enfin, les crédits incluent souvent des options offertes – ou tarifées – comme l'option de remboursement anticipé ou l'option de renégociation de taux. Pour la première, il s'agit de permettre au client de rembourser tout ou partie du *capital restant dû* avant l'échéance prévue ; pour la seconde, il s'agit pour le client, dans le cas d'une évolution des conditions de prêt proposées sur le marché ou par la concurrence, de renégocier la valeur du taux de son crédit ou sa nature (fixe en variable ou inversement). Ces options, dont l'initiative relève souvent de la sphère commerciale, posent au sein de l'établissement bancaire des questions multiples, principalement au niveau de l'appréciation financière des risques qu'elles génèrent et des stratégies de gestion à adopter.

Le passif, quant à lui, rassemble pour l'établissement financier des ressources au coût en général moindre à ce que peut proposer la sphère financière. En effet, les dépôts de la clientèle se caractérisent en général par des taux relativement faibles, l'exemple typique étant celui des dépôts à vue français, ceux-ci n'offrant aucune rémunération à la clientèle. La différence de taux entre les crédits et les dépôts au niveau de la clientèle constitue ce qu'on appelle la marge d'intermédiation. Par ailleurs, le passif sur la sphère opérationnelle se compose généralement de ressources *sans échéance contractuelle* et le client peut effectuer des transferts d'argent d'un type de compte à l'autre à sa guise, sans frais, ce qui constitue autant d'options cachées et gratuites accordées à la clientèle.

Pour développer ce point que nous évoquons plus haut, on peut dire que le client dispose d'options de liquidité, c'est-à-dire de liberté de retrait ou de transfert vers son épargne (elle-même multiforme). Du point de vue de la banque, le risque que constitue le retrait des dépôts par la clientèle constitue non seulement un risque de liquidité, mais également un risque de taux d'intérêt du fait que l'établissement se retrouve obligé, pour disposer du même montant de ressources, d'emprunter sur le marché à des taux en général plus élevés. De tels phénomènes de « fuite des ressources » peuvent être accélérés par une perte de confiance de la clientèle en l'établissement – cas de la crise récente de la Northern Rock – ou par une stratégie offensive de la concurrence. Par ailleurs, au sein du passif, certains produits, comme

l'épargne logement en France, allient options pendant la phase d'épargne et options sur le crédit (possibilité d'emprunter au bout de 4 ans à un taux figé à l'ouverture du plan épargne-logement (PEL)).

Ainsi, le risque de taux sur les dépôts à vue est intrinsèquement lié à une option cachée offerte à la clientèle qui est celle d'effectuer gratuitement et sans limite des transferts d'argent entre comptes à vue, comptes d'épargne (épargne dite « de bilan » - livrets, épargne logement, dépôts à terme, etc.) et autres types de placements (épargne de « hors-bilan » - assurance vie, SICAV monétaires, etc.)<sup>1</sup>. Les caractéristiques de ces différents produits (à l'exception peut-être des dépôts à terme) sont relativement proches, sauf pour les conditions de taux qu'elles proposent. En effet, si les dépôts à vue ne sont pas rémunérés, ou peu, ce n'est pas le cas des autres ressources, elles-mêmes sujettes à des fluctuations très diverses. Ainsi on imagine qu'en cas de hausse des taux, on observera davantage de transferts en provenance des dépôts à vue vers des comptes d'épargne rémunérés.

Ces options cachées génèrent notamment un risque de taux au niveau de la banque, un risque que le développement des produits dérivés (caps, floors, swaps, swaptions, dérivés inflation, etc.) et structurés sur les marchés financiers permet potentiellement de couvrir. La banque peut en effet concevoir des stratégies de couverture par rapport à ces engagements optionnels à l'aide de produits dérivés de taux.

---

<sup>1</sup> Il faut également compter, jusqu'au 1<sup>er</sup> janvier 2009, avec le cas du Livret A, uniquement distribué par la Banque Postale, les Caisses d'Epargne et le Crédit Mutuel. Actuellement, ce produit occupe une place très importante dans l'épargne des ménages. En janvier 2009, ce produit rentrera dans le bilan des banques au sein l'offre d'épargne.

## Chapitre 2. Les risques financiers

Nous étudions ici les différents types de risques financiers (contrepartie (crédit), liquidité, taux, change, de marché) au travers de leur nature et de leur mesure (de valeur ou de marge).

### 1. Le risque de contrepartie

Le risque de contrepartie se manifeste essentiellement sous 3 formes :

- le *risque sur l'emprunteur* ou *risque de défaut*, aussi bien sur les crédits pour la clientèle que sur les marchés financiers, c'est-à-dire le risque lié à l'impossibilité pour l'emprunteur de rembourser les capitaux ;
- le *risque sur prêteur*, consistant en une défaillance des garanties potentielles de financement ; d'une importance marginale, c'est un risque de second ordre par rapport au risque sur l'emprunteur ;
- le *risque de contrepartie sur instruments dérivés*, lié à la multitude d'opérations sur produits dérivés passées sur les marchés financiers ; par exemple, le non paiement d'un coupon dans un contrat de swap rentre dans cette catégorie.

Sur le *Banking Book* on note essentiellement le risque sur l'emprunteur tandis qu'on note les 3 types de risque de contrepartie dans le *Trading Book*.

La mesure du risque de contrepartie dépend à la fois de la sphère sur laquelle on le considère et du type de risque auquel on est confronté, selon la distinction que nous venons d'effectuer. En ce qui concerne le risque emprunteur du *Banking Book*, il est évalué par le biais d'une procédure de *scoring* avant la mise en place du contrat ; toutefois, un suivi de l'évolution de la qualité de score du client n'est pas toujours possible. Par ailleurs, le risque de contrepartie sur le *Banking Book* a l'avantage d'être naturellement relativement diversifié, étant donnée l'existence d'une multitude de lignes de crédit ; en revanche, la banque n'est pas à l'abri par exemple de phénomènes de secteur. Typiquement, les événements conjoints de défaut constatés dans la récente crise dite des *subprimes* rentrent dans ce cadre.

Nous verrons que la tarification du risque de crédit sur le *Banking Book* est confiée aux entités commerciales et auditée par le *risk management* (fonction centrale). En particulier, cette tâche ne revient pas à l'ALM mais celle-ci doit tout de même en avoir une certaine connaissance, puisqu'elle participe à la décision d'allocation des fonds propres aux entités commerciales. La tarification des lignes de crédit devrait donc faire l'objet de négociation au moins entre les entités qui vendent les produits et celles qui allouent les fonds propres, avec les fonctions de *risk management* dans leur rôle d'auditeur. En fait, nous aurons l'occasion de revenir plus loin sur ces questions relatives à la place de l'ALM et au *business model*.

Sur la sphère financière, la donne est différente pour ce qui est du risque emprunteur. Par contraste avec la sphère opérationnelle, l'information disponible sur les contreparties est censée être davantage fournie et de meilleure qualité (agences de notation, analyses financières, etc.). Pour le risque de contrepartie sur les produits dérivés – par nature lié à la sphère financière – les pertes potentielles encourues s'évaluent en coût de remplacement de la

garantie perdue. Par exemple, dans le cas d'un défaut sur un contrat de swap de taux, la méthode consiste à calculer la valeur actualisée des flux futurs générés par le remplacement du swap initial par un nouveau swap de même échéance et dont le taux est associé à une maturité nécessairement adaptée à la durée résiduelle du contrat.

Le traitement du risque de contrepartie repose pour beaucoup sur une *tarification adaptée* : l'idée est de facturer les engagements risqués. Il s'appuie également sur une *diversification des engagements* – par classe de contreparties, par pays, etc. – et une *allocation suffisante en termes de fonds propres*, en partie sur la partie qui n'a pas été prise en compte à travers la tarification (*unexpected losses*).

Les contraintes réglementaires sur le risque de contrepartie, pour les banques, portent essentiellement sur :

- le ratio de solvabilité et le ratio Cooke sur la partie commerciale ;
- la réglementation sur l'adéquation des fonds propres au risque de marché pour l'activité de marché.

## 2. Le risque de liquidité

Pour un établissement de crédit, le risque de liquidité représente l'éventualité de ne pas pouvoir honorer ses engagements, même par la mobilisation de ses actifs. Il se matérialise soit par un retrait massif des dépôts ou de l'épargne de la clientèle, soit par une crise de confiance du marché à l'égard de la banque, soit par une crise de liquidité générale du marché. Les deux premières causes sont souvent la conséquence d'une dégradation de l'image de la banque vis-à-vis de la clientèle ou du marché ; la troisième est de nature davantage exogène. Les événements consécutifs à la crise des *subprimes* relèvent d'une crise de confiance interbancaire générale. La liquidité est soudainement devenue plus rare, les spreads des établissements ont subi une augmentation significative globale, impliquant des coûts de financement, un *coût de la liquidité*, plus importants pour les banques.

A l'heure actuelle, la mesure de risque de liquidité passe tout d'abord par le calcul de l'*impassé de liquidité* (en anglais, *liquidity gap* ou encore *gap de liquidité*). On la calcule en retranchant l'*échéancement prévisionnel* des emplois à celui des ressources, options cachées incluses. L'élaboration de l'échéancement prévisionnel consiste en une évaluation de l'amortissement en liquidité des ressources ou des emplois. Dans le cas du *Banking Book*, il faut en plus prendre en compte les *options cachées* incluses dans les différents produits, par exemple l'option de remboursement anticipé « raccourcit » l'échéancier de liquidité du crédit associé. En particulier, l'échéancier de liquidité est a priori aléatoire, dans le sens où une incertitude existe sur l'exercice ou non des options futures, nous aurons l'occasion de revenir sur ce point en troisième partie de cette thèse.

Le risque de liquidité ne porte pas seulement sur l'échéancement de la liquidité disponible, il porte aussi sur l'évolution du coût de la liquidité. A l'heure actuelle, les banques n'ont qu'une faible appréhension de la sensibilité de leurs *marges* et de la *valeur* des éléments de leur bilan à ce coût. En fait, elles tentent en ce moment d'y remédier suite à la crise de liquidité récente. Ainsi, la couverture du risque de liquidité, ou d'illiquidité, passe tout d'abord par l'adossement en liquidité des ressources aux emplois. Ensuite, elle consiste à lever (ou replacer) les fonds nécessaires afin d'insensibiliser les marges / la valeur au coût de la liquidité. En général, le coût de la liquidité est croissant avec la maturité des engagements ce qui est indicateur de l'existence d'une prime de risque. Actuellement, la hausse importante et

globale de ce coût pour les banques pousse les banques à s'intéresser plus étroitement à l'identification et la modélisation des *spreads* et à la mesure du risque de liquidité.

D'un point de vue réglementaire, les indicateurs retenus au niveau des banques portent sur des *ratios de liquidité*, en l'occurrence les ratios de liquidité 1 mois et les ratios d'observation à 3, 6 et 12 mois, également les ratios de fonds propres et de ressources permanentes à 5 ans.

### **3. Le risque global de taux d'intérêt**

Le risque de taux d'intérêt représente l'éventualité pour la banque de voir sa rentabilité affectée par la fluctuation des taux. De telles fluctuations peuvent à la fois affecter la marge de transformation et la valeur. Par exemple, le risque de taux se manifeste lorsqu'un établissement finançant à court terme un prêt à taux fixe sur le long terme, se retrouve exposé à une hausse brutale des taux.

Le risque de taux d'intérêt est celui qui possède un des plus grands impacts en termes de revenus potentiels pour les intermédiaires financiers. Il provient du décalage de maturité entre l'actif (crédits, *leasing*, investissements, etc.) et le passif (dépôts de la clientèle, dette, etc.). Des effets agressifs d'arbitrage entre les ressources et de remboursement anticipé des crédits de la part de la clientèle peuvent également affecter la sensibilité aux taux de la marge nette d'intérêt. Enfin, les variations de taux peuvent survenir de manière indépendante sur les taux longs et sur les taux courts. La notion de globalité fait référence à la mesure de ce risque sur le bilan bancaire dans son ensemble, avec les problèmes pratiques que cela implique (cf. Sections 3 et 5). Le risque de taux d'intérêt *global* regroupe donc le risque lié aux taux de toutes maturités et pour tous les produits.

Pour mesurer le risque de taux, à l'image du risque de liquidité, on s'appuie dans un premier temps sur une *mesure de gap* ou d'*impasse*, correspondant à la sensibilité du résultat comptable, à chaque date future, à la variation des taux. Cet indicateur se base donc sur la *marge*, c'est-à-dire le niveau de rentabilité consolidé des emplois et ressources. C'est par un calcul de sa sensibilité, options incluses, qu'on mesure le risque de taux qui y est associé. Un des problèmes soulevé par le calcul de cette sensibilité est la capacité du groupe à consolider les emplois et ressources de chaque filiale, sur chaque produit, et d'en évaluer la sensibilité aux taux d'intérêt. Cela nécessite évidemment des systèmes d'information suffisamment performants, mais également un *business model* étudié au niveau de la mise en forme des bases de données pour leur analyse et l'élaboration de modèles. C'est un point que nous évoquerons plus loin dans cette partie.

En plus de la marge et de ses sensibilités, il y a l'*indicateur de valeur*, associé à une actualisation des flux futurs générés par l'ensemble des activités de la banque. Qualitativement, l'approche ancienne, alors relativement répandue, consistait à affirmer que l'influence des fluctuations des taux d'intérêt n'existe réellement que sur les portefeuilles du *Trading Book*. En d'autres termes, l'impact de la hausse des taux sur la valeur de revente des actifs d'un établissement de crédit serait limité du fait que c'est une opération suffisamment rare pour qu'elle ne s'effectue pas sur la base d'une valeur de marché. Désormais, ce point de vue est largement contesté, au moins depuis les discussions autour de la mise en place du Pilier II des accords de Bâle II et la gestion du risque de taux d'intérêt global de la banque. Le calcul de la valeur est désormais présent dans les processus de *reporting* interne et externe, de négociation entre la direction centrale et le réseau commercial et les filiales (ALCO) et de valorisation en fusion-acquisition.

En somme, ce n'est qu'une transposition à l'ensemble du bilan de ce qui était déjà fait sur les titres et les portefeuilles optionnels du *Trading Book*. Ainsi l'évaluation du risque de taux s'effectue également au travers du calcul de l'indicateur de VAN (Valeur Actuelle Nette). En fait, l'imputation des variations de cet indicateur au résultat d'exploitation dépend des normes comptables en vigueur et de la nature des titres. De même, pour légitimer d'un point de vue réglementaire la mise en place de telle ou telle stratégie de couverture au niveau de l'ALM bancaire, il devient nécessaire justifier d'une sensibilité des marges et/ou de la VAN aux variations des taux, suivant la règle comptable invoquée (cf. chapitre 3).

En définitive, la couverture du risque de taux d'intérêt global s'effectue en réalisant l'objectif de figer les marges de transformation ou la VAN, selon le mode de comptabilisation, afin de les protéger des fluctuations des taux de marché.

#### **4. Le risque de marché**

Le risque de marché correspond à la possibilité de voir fluctuer la *valeur de marché* d'une opération sous l'effet des variations des prix des sous-jacents associés. Par exemple, ce risque s'identifie à un risque de taux d'intérêt lorsque les produits concernés sont des obligations ou des produits dérivés de taux. Il concerne par exemple aussi les opérations sur actions et matières premières. Ce risque est présent dans les banques à travers les opérations de placement (au niveau ALM, par exemple) et les opérations de *trading* correspondant à l'activité commerciale de marché de l'établissement.

La mesure du risque de marché s'effectue à l'aide d'outils de valorisation des positions en temps réel. La dimension « temps réel » se justifie par la volatilité relativement importante des sous-jacents et des positions associées et implique un suivi « *mark to market* » des positions. En termes de couverture, la stratégie adoptée dépend des objectifs de l'entité concernée, en termes de couple rendement / risque notamment. Une couverture parfaite aurait par exemple tendance à annihiler aussi les perspectives de profit.

Les limites sur le risque de marché sont en général fixées sur la base de seuils en pertes ou en gains. Du coup, en gestion, il existe une différence entre les placements liés à l'activité de gestion de bilan (ALM) et l'activité commerciale de marché dans la mesure où les positions auront tendance à être retournées pour des variations de valeur plus petites en trading, étant donné la moindre importance des montants en jeu, relativement à l'activité de gestion de bilan.

#### **5. Risque de « business » et risque opérationnel**

Le risque de « *business* » est assez délicat à quantifier et à couvrir, puisqu'il désigne l'ensemble des fluctuations dues à des facteurs commerciaux, comme par exemple les mouvements de la concurrence, les changements de politique commerciale, etc. Ainsi, une campagne commerciale visant à mettre en valeur un certain type de produit (compte d'épargne / crédit) a une influence sur les revenus de l'activité commerciale de la banque, donc sur le bilan. Le risque de business est associé à ce genre de fluctuations.

Il faut le dissocier du risque opérationnel, qu'on peut considérer par contraste comme de l'ordre du malencontreux ou de l'inattendu. Le comité de Bâle II le définit comme le « risque

de pertes provenant de processus internes inadéquats ou défailants, de personnes et systèmes ou d'événements externes. ». Le risque opérationnel inclut alors toutes formes de fraudes, malveillances, accidents, catastrophes naturelles, etc.

La mesure du risque opérationnel s'appuie essentiellement sur la mise en place de bases de données historiques sur les montants de pertes associés à divers types d'événements relevant de ce risque. En général constituées en interne, ces bases de données sont utilisées afin de proposer des analyses statistiques, comme par exemple l'approche « Distribution des pertes » (*Loss Distribution Approach* ou LDA) et les approches par scénarios. La modélisation mathématique du risque opérationnel s'est bien étoffée ces dernières années avec l'utilisation de l'*Extreme Value Theory* (EVT). A l'heure actuelle, l'approche LDA demande des développements sur les modèles de sévérité (EVT) et sur la compréhension de la structure de dépendance dans le calcul de la distribution des pertes agrégées.

## **6. Le rôle des fonds propres**

En face des risques, il y a les fonds propres. Tout d'abord, ceux-ci sont nécessaires à la croissance de l'établissement, car la constitution du capital est l'étape numéro un de la vie d'une société, également car les contraintes réglementaires imposent souvent un montant de fonds propres directement lié au volume des actifs de l'établissement : il n'y a donc aucune croissance sans un accroissement associé des fonds propres. Par ailleurs, ceux-ci constituent une garantie vis-à-vis des créanciers, car les fonds propres sont en principe prévus pour absorber des pertes imprévues liées à la réalisation de certains risques pris. Ainsi, la notation obtenue par la banque auprès d'agences spécialisées prendra en compte, entre autres, la solidité de sa structure de fonds propres.

Toutefois, ceux-ci sont aussi généralement les ressources les plus chères. En effet, l'établissement subit une contrainte de rentabilité de ses fonds propres, car l'actionnaire-investisseur en attend une forte rentabilité. Une partie de celle-ci est en effet reversée sous forme de dividendes, l'autre partie étant mise en réserve afin d'accompagner la croissance de l'établissement par autofinancement. Les dividendes versés aux actionnaires peuvent ainsi être considérés comme un taux d'intérêt des ressources que constituent les fonds propres, un taux élevé relativement aux autres sources de financement (issues de la clientèle ou des marchés). Ainsi, les fonds propres sont associés à deux types d'obligations, de sécurité et de rentabilité.

Pour résumer les enjeux liés aux fonds propres, d'un côté, l'exigence de rentabilité des actionnaires (définie par comparaison aux autres types de placements qui s'offrent à eux par ailleurs) et les exigences des créanciers (qui se manifestent au travers des conditions de refinancement proposées à l'établissement sur les marchés et qui représentent la confiance qu'ont les créanciers en sa politique de fonds propres – citons également la qualité de notation auprès des agences spécialisées, autant de facteurs qui conditionnent la vision que le marché a de l'établissement) fixent des objectifs minimaux pour la banque en termes de fonds propres. Face à cela, l'établissement financier a la possibilité d'optimiser l'allocation de ces fonds entre ses différentes activités, en fonction du niveau de rentabilité et les risques portés par celles-ci. L'idéal pour une banque constitue le financement intégral de sa croissance par autofinancement : pour y tendre, elle doit associer gestion efficace des risques (afin d'éviter d'avoir à amputer ses réserves en cas de coup dur) et protection optimisée de ses fonds propres par exemple par placement sur des titres à long terme.

## 7. L'allocation des fonds propres

Ce problème est d'ordre stratégique et touche au cœur des préoccupations d'un établissement bancaire. En effet, nous verrons en partie 2 de cette thèse que la quantification des risques au sein de chaque activité est déjà en soi une tâche délicate. En effet, une méthode de quantification est intimement liée à une vision du risque, que ce soit une fonction d'utilité, un indicateur d'aversion ou une mesure de risque. Or la détermination unique d'un tel critère semble de l'ordre de l'illusoire à l'heure actuelle, étant donné le mode de gouvernance et la taille des établissements.

Ensuite, une fois la méthode de quantification désignée, une allocation optimale se doit de prendre en compte la contribution de chaque entité (groupe / filiale) puis de chaque activité au sein des entités, au risque total, ce qu'on appelle, dans un monde moyenne-variance, la « prise en compte des effets de corrélation ». En théorie générale du risque, on parle d'effets de compensation ou d'« anti-comonotonie ». Or, en général, la mesure du risque de chaque entité n'a aucune raison d'être égale à la contribution de cette entité au risque global du groupe et c'est ce qui rend complexe, d'un point de vue scientifique déjà, le calcul des contributions.

En fait, d'un certain point de vue, le problème d'allocation optimale de fonds propres correspond à un problème d'optimisation de portefeuille sous contrainte de risque, où on cherche ici la composition optimale d'un portefeuille d'activités ou d'entités.

Au vu de tout cela, on s'aperçoit que le processus d'allocation des fonds propres fait l'objet en interne d'âpres négociations, car de cette allocation de fonds propres dépend l'orientation globale de la politique de l'établissement et la marge de manoeuvre de chaque entité. Ainsi, les enjeux de l'allocation de fonds propres sont doubles :

- d'un point de vue **stratégique**, il s'agit d'allouer de manière optimale les fonds étant donné les disparités dans les risques et les rentabilités générés par chaque activité ; il s'agit alors de résoudre un programme de maximisation de la rentabilité du *portefeuille d'activités* de la banque sous une contrainte de niveau global des fonds propres ;
- d'un point de vue **opérationnel**, il s'agit d'afficher auprès des observateurs de marché – et notamment des agences de notation – un système performant d'allocation de fonds propres car c'est susceptible d'affecter la qualité de signature de l'établissement bancaire.

Les fonds propres prennent alors plusieurs formes :

- les **fonds propres comptables** se divisent entre les *fonds propres comptables sociaux* et les *fonds propres consolidés*. Les premiers sont la somme du capital social, des réserves, du report et du fonds pour risques bancaires généraux (qui incorpore le « risque pays » par exemple) ; ils servent de base au calcul du ratio de rentabilité des fonds propres, celui qui est défini comme le rapport entre le résultat net et les fonds propres comptables et qui est classiquement comparé à un niveau de 15%. Les fonds propres consolidés, quand à eux, sont la somme des fonds propres sociaux de toutes les sociétés d'un groupe, déduction faite des titres internes de participation ;

- les ***fonds propres réglementaires*** comprennent les fonds propres de base (capital social, réserves, report, fonds pour risque bancaires généraux) majorés des fonds propres complémentaires (dette subordonnée supérieure à 5 ans), et autres fonds propres sur-complémentaires d'une importance marginale ;
- les ***fonds propres économiques*** représentent la valeur effectivement mobilisable pour l'absorption de pertes éventuelles ; ils se calculent sur la base des fonds propres comptables auxquels on ajoute les plus ou moins-values latentes sur le patrimoine immobilier et l'activité de portefeuille de la banque. Toutefois, les fonds propres économiques diffèrent de la *valeur boursière* (valeur de marché des fonds propres) en raison de la non prise en compte des anticipations sur les flux futurs.

La forme d'allocation des fonds propres peut être réelle ou notionnelle. Dans le premier cas, il faut s'intéresser à la *réalité* de l'affectation des fonds propres ; dans le second, il s'agit de s'intéresser à une répartition fictive des fonds propres entre les différentes activités selon leur contribution au risque total de l'établissement financier, avec les difficultés évoquées plus haut.

## Chapitre 3. L'environnement réglementaire

### 1. Vue d'ensemble du contexte réglementaire

Chaque pays est doté d'un régulateur et la réglementation constitue un facteur important à prendre en compte pour les ALM. A un niveau national, on a par exemple la FSA (*Financial Services Authority*) au Royaume-Uni, la Commission Bancaire en France, la SEC (*Securities and Exchange Commission*) et l'OTS (*Office of Thrift Supervision*) aux Etats-Unis, etc. Le rôle du régulateur est d'apporter une certaine stabilité au marché, nécessaire aux acteurs qui y interviennent. Egalement, du point de vue de l'analyse financière, les indicateurs réglementaires constituent des éléments de comparaison entre les établissements.

Au niveau international, c'est le Comité de Bâle (*Basle Committee*) ou le CEBS (*Council of European Banking Supervisors*), au niveau européen, qui coordonnent l'action des régulateurs nationaux. Par exemple, le Comité de Bâle a mandaté la Commission Bancaire française pour l'application des directives des accords de Bâle II (cf. plus loin). Le Comité de Bâle est composé des membres du G10 représentés par leur banque centrale ou leur autorité nationale de régulation. Il se réunit 4 fois par an et publie régulièrement des notes de recommandation à destination des établissements financiers.

Par exemple, dans le cadre des accords de Bâle II, le processus a été initié par des recommandations en 2004 avant de donner lieu à une proposition de directive européenne, un texte de compromis votée par le parlement en 2005 et une adoption définitive en 2006. La mise en vigueur en France a ainsi eu lieu à compter de Janvier 2007. Le calendrier proposé plus bas reprend ces points.

### 2. Les accords de Bâle II

Les accords de Bâle II, ratifiés en Juillet 2004, proposent une norme internationale de mesure du capital des établissements bancaires. Ils font suite aux accords de Bâle I de 1988. Le principe des accords de Bâle (I et II) repose sur le fait que les différentes formes de risques pris par les banques doivent faire l'objet de garanties en capital (*equity*), c'est-à-dire en financement apporté par les actionnaires. En d'autres termes, du point de vue du régulateur, le principe est qu'il est plus important de protéger les créanciers de la banque que les actionnaires.

La réglementation bâloise est née de travaux commencés en 1999 et achevés en 2004, donnant naissance à un accord sur la solvabilité des établissements de crédit. Comme évoqué ci-dessus, elle s'organise selon 3 piliers (cf. également schéma ci-dessous) :

- le Pilier I définit des exigences minimales en capital relativement aux risques de crédit, de marché et opérationnel ;
- le Pilier II implique une surveillance des superviseurs nationaux en complément de la surveillance prudentielle ainsi que des dispositions relatives aux risques non intégrés dans le Pilier 1 (liquidité, taux d'intérêt global, etc.), pouvant donner lieu à des exigences de fonds propres ;
- le Pilier III traite de la discipline de marché, à travers le développement de la communication financière et dans le but d'améliorer les pratiques de gestion des risques.

Si le Pilier I exige déjà des banques des éléments en termes de capital réglementaire, celles-ci sont aussi de plus en plus sommées par le Comité de Bâle et les régulateurs de se munir en interne d'indicateurs supplémentaires, comme le capital économique par exemple.

### **a. Etat actuel de l'application des accords de Bâle II**

Voici un calendrier résumé des événements liés à l'application des accords de Bâle II (source Fédération Bancaire Française) :

26 juin 2004 : Publication des recommandations dites « Bâle II » ;

14 juillet 2004 : Proposition de directive européenne sur l'adéquation des fonds propres (CRD – *Capital Requirements Directive*) ;

1<sup>er</sup> janvier 2006 : les établissements de crédit calculent en parallèle le ratio Cooke (Bâle I) et le ratio McDonough (Bâle II) ;

14 juin 2006 : Adoption de la directive CRD ;

1<sup>er</sup> janvier 2007 : entrée en vigueur de la CRD pour les approches standard et *Internal Rating Based* (IRB) ;

1<sup>er</sup> janvier 2008 : entrée en vigueur de la CRD pour les approches IRB-A (*IRB-Advanced*).

La Figure 3.1 ci-dessous détaille les éléments contenus dans chaque pilier des accords de Bâle II, en particulier ceux du Pilier II, celui qui est actuellement en cours de mise en œuvre au sein des établissements.

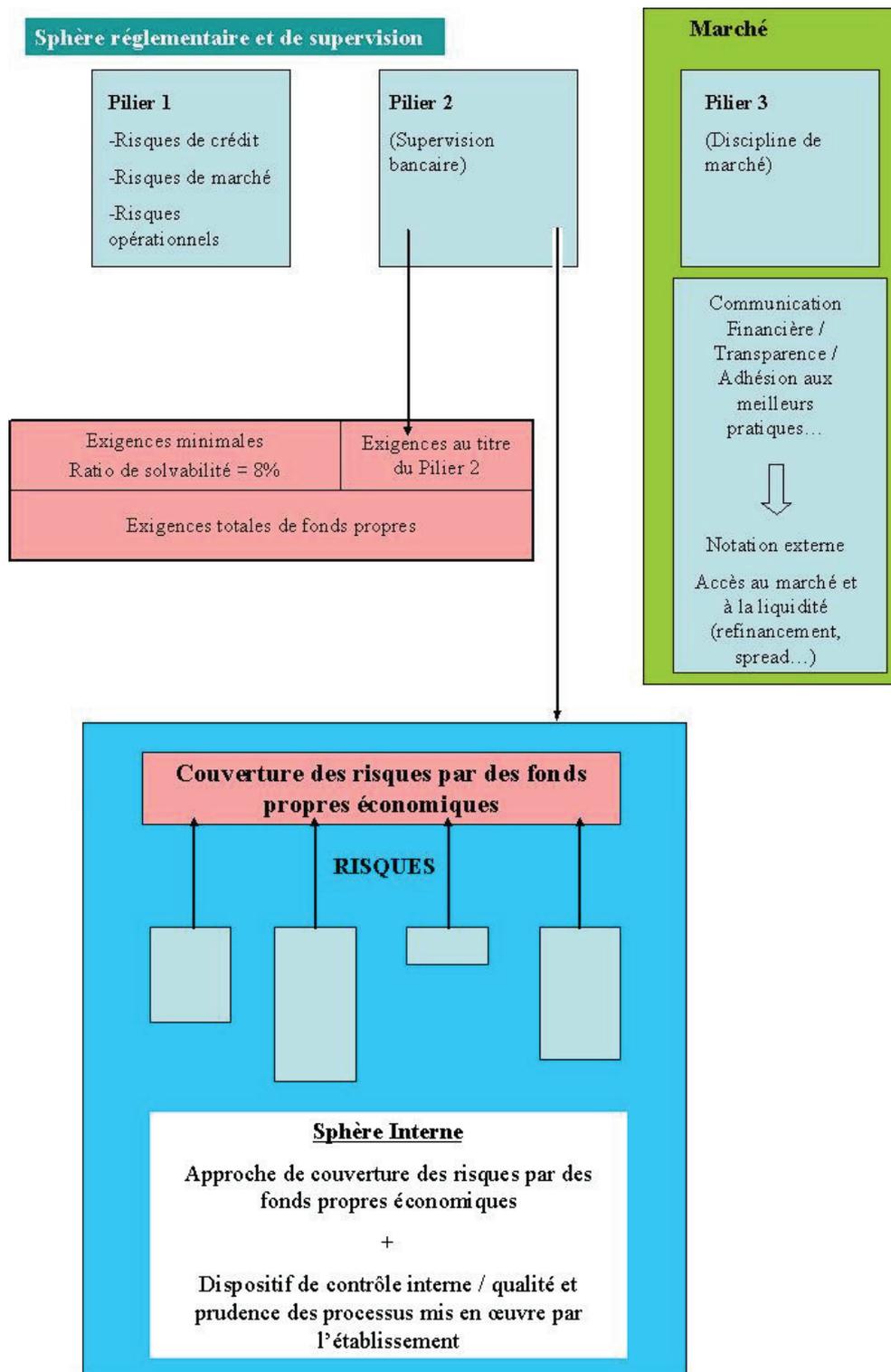


Figure 3.1. Les 3 piliers de Bâle II – Focus sur le Pilier 2.

Suite à la récente crise de liquidité de 2007-2008, les accords de Bâle II se sont renforcés de points de recommandation concernant :

- l'amélioration du traitement en capital des produits structurés de crédit complexes, notamment des conduits et des expositions en crédit du *Trading Book* ;
- le renforcement de la gestion du risque de liquidité.

A cela s'ajoutent un suivi plus rapproché des processus en cours concernant le Pilier II – stress-testing, gestion du hors-bilan, pratiques d'évaluation – et le Pilier III – amélioration de la discipline de marché.

## **b. Le Capital Économique – principes généraux.**

Le *capital économique* est une mesure de risque interne qui, comme le capital réglementaire, a pour vocation de représenter le risque présent au bilan de la banque. Le processus de calcul du capital économique peut se résumer autour de quatre principes : la capacité des banques à évaluer leurs besoins en capital par rapport à leur niveau de risque, la validation du mode de calcul par le superviseur, la comparaison au minimum réglementaire (principe présent au Pilier II des accords de Bâle II) et le souci du régulateur à suivre la bonne adéquation du capital économique aux besoins. Ce dernier principe sous-entend une implication des autorités réglementaires dans la gouvernance bancaire.

Au niveau groupe, le capital économique correspond à une mesure de risque appliquée à la *valeur économique* de l'établissement. Celle-ci correspond à l'espérance mathématique de la somme des flux futurs générés par l'ensemble des activités de l'établissement et se retrouve ainsi intimement liée à la notion de VAN définie au chapitre précédent. Par conséquent, cette valeur est une variable aléatoire dont le capital économique constitue une *mesure* du risque.

D'un point de vue groupe / filiales, la valeur au niveau global est égale à la somme des valeurs des entités composant l'établissement. Du point de vue mathématique, l'opérateur de valeur est linéaire et il se calcule en *consolidant* les flux générés par chaque filiale au niveau individuel. En revanche, comme nous évoquions à l'occasion du problème d'allocation des fonds propres, le capital économique au niveau groupe ne se retrouve en général pas en sommant les capitaux économiques calculés au niveau de chaque pôle / activité / filiale.

Cependant, les procédures internes permettent de calculer la *contribution* de chaque sous-entité au capital économique du groupe. Il est en effet possible de calculer la sensibilité de l'indicateur de capital économique au niveau global à chaque sous-entité, comme on calculerait la sensibilité de la valeur d'un portefeuille à la variation de cotation de chaque actif le composant<sup>2</sup>. Cette sensibilité s'interprète alors comme la contribution de chaque activité au capital économique global, qu'on retrouve d'ailleurs en sommant l'ensemble des contributions de chaque activité.

## **3. Approches réglementaires du risque de taux d'intérêt global**

Le risque de taux d'intérêt global est cité au titre des Piliers II et III, du moins en ce qui concerne le portefeuille bancaire (*Banking Book*). Les dispositions prises dans le cadre du

---

<sup>2</sup> Mathématiquement, ceci est possible pour des mesures de risques positivement homogènes, car dans ce cas, elles vérifient la propriété d'Euler, i.e. si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction homogène de degré 1, alors

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n). \text{ Ici, la fonction } f \text{ représente la mesure de risque}$$

et les dérivées partielles, la contribution au risque de chaque élément du portefeuille ( $x_k$  représentant la pondération de chaque élément).

portefeuille de marché (*Trading Book*) sont toujours relatives aux risques de marché, traités dans le Pilier I.

### **a. Les grands principes du Pilier II et les modalités de leur mise en œuvre**

Tout d'abord, le Pilier II définit des principes renforçant le processus de surveillance prudentielle, sur une base consolidée. La démarche s'appuie sur une évaluation du profil de risque des établissements et sur l'appréciation du caractère adéquat du dispositif interne de couverture des risques par des fonds propres économiques. En cas d'insuffisance de ceux-ci par rapport aux contraintes prudentielles, les autorités peuvent exiger des dotations en fonds propres supplémentaires ou des réductions de risque de la part des établissements de crédit.

Ces directives sont formalisées dans deux grandes séries de principes :

- la première rappelle les meilleures pratiques relatives à la gouvernance d'entreprise et au dispositif de contrôle interne ;
- la deuxième précise les attentes du superviseur au sujet de l'évaluation interne des risques et de l'allocation d'un niveau adéquat de capital interne en couverture de ceux-ci (*Internal Capital Adequacy Assessment Process* ou ICAAP).

Rappelons que le Pilier II, en plus du risque de taux d'intérêt global sur le *Banking Book*, traite également des risques de concentration (groupes de contreparties, sectoriel, géographique), du risque stratégique, du risque de réputation et du risque de liquidité. Les directives du Pilier II insistent également sur les pratiques de simulation de crise, dites de *stress testing*, imposant de prendre en compte les résultats de telles études dans les décisions interne d'allocation de capital en couverture des risques.

### **b. Le traitement réglementaire du risque global de taux d'intérêt selon Bâle II**

Le document du Comité de Bâle s'organise autour d'un certain nombre de principes, dont les points majeurs sont les suivants :

- l'*exécution de simulations de crise (stress testing)* avec un élargissement de la palette de scénarios, en les faisant porter à la fois sur des chocs pouvant affecter les hypothèses de modélisation du bilan et sur des scénarios « catastrophes », plus rares ; cette approche doit également servir pour l'établissement à lui fournir des plans d'urgence au cas où ;
- la nécessité d'ajouter à l'utilisation, insuffisante, d'indicateurs d'impasse, celle de simulations relatives à l'*évolution de la marge nette d'intérêt (MNI)*;
- la *prise en compte de la durée* des positions pour davantage de précision dans la mesure du risque de taux d'intérêt global sur le *Banking Book*. Cela revient à s'intéresser à des *indicateurs de sensibilité de la Valeur Actuelle Nette (VAN)* de l'ensemble des positions – bilan et hors bilan.

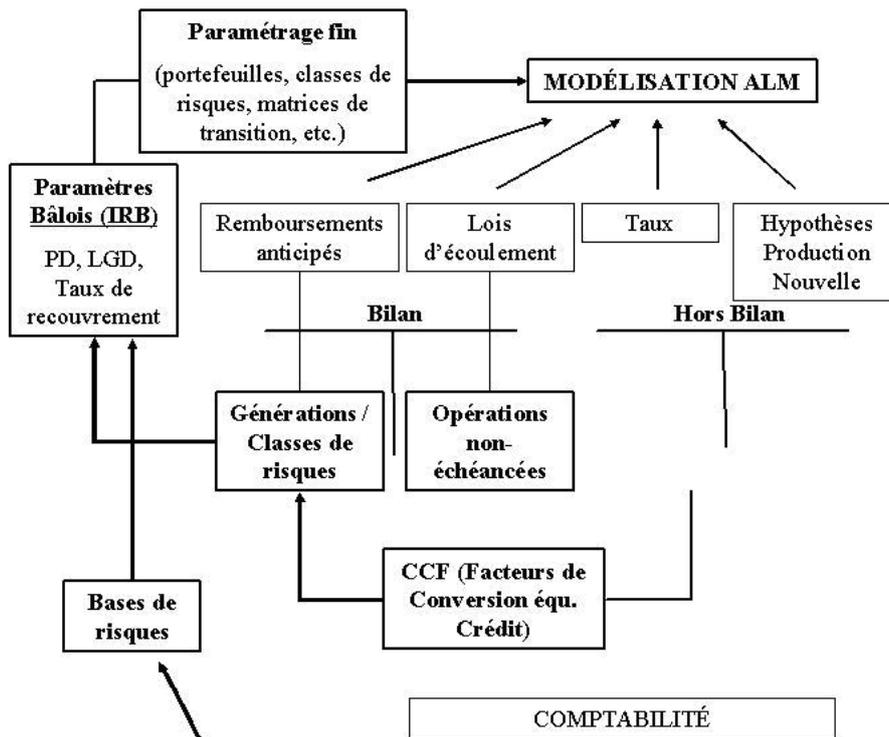
Plus précisément sur ce dernier point, le Comité de Bâle préconise une mesure de la sensibilité de la VAN du banking book à des chocs de taux de +/- 200 bp : il s'agit de mesurer la sensibilité de l'évaluation *mark to market* de l'ensemble des positions à un choc positif et à son choc symétrique. Ceci requiert des systèmes d'information particulièrement performants ; par conséquent, les directives prévoient également des méthodes approchées dans le cas où de tels calculs ne sont pas réalisables.

Le dispositif prévoit un certain nombre d'affinements de la gestion des risques liés au Pilier II pour les établissements autorisés à recourir à un système de notation interne (IRB et IRB-A), avec entre autres :

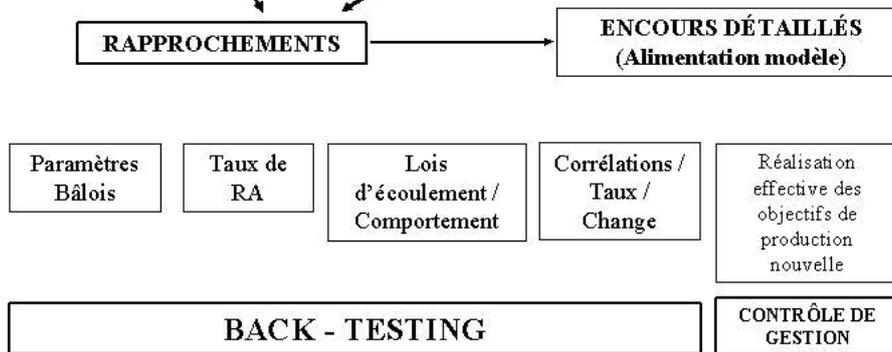
- un affinement de l'analyse des marges nettes d'intérêt par portefeuilles et par classes de risques ;
- dans le cadre du risque de crédit, une meilleure appréhension des événements de défaut (impact au niveau de l'évolution des encours) et une approche plus fine des recouvrements ;
- un renforcement du contrôle des données en entrée et en sortie des modèles ;
- des exigences marquées en matière de back-testing (paramètres et hypothèses) ;
- une identification plus fine des paramètres de volatilité de la MNI et du risque de taux d'intérêt global ;
- une meilleure connaissance des interactions entre les différents types de risque, en commençant par les liens entre risques de crédit et de taux d'intérêt par exemple.

Le schéma ci-après (Figure 3.2) résume les recommandations de la réglementation Bâle II en termes de gestion du risque de taux d'intérêt global.

### I – Gestion Opérationnelle



### II – Contrôles



### III – Identification des facteurs de vulnérabilité (Gestion prudentielle du risque)

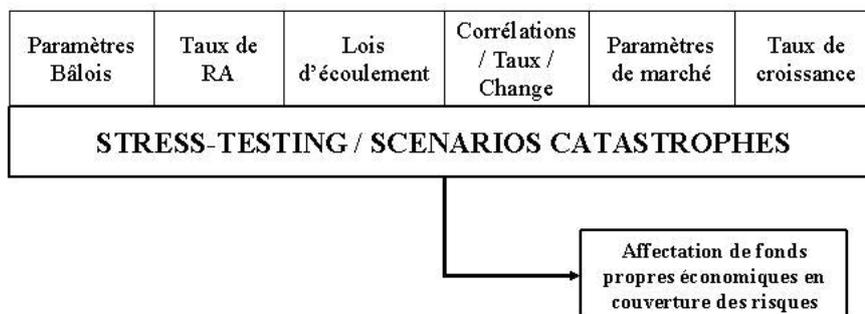


Figure 3.2. Schéma de contrôle interne selon le comité de Bâle. Ce schéma représente ce qu'attend le régulateur bâlois des établissements bancaires en termes de gestion du risque de taux d'intérêt global. On y trouve la place du backtesting et des simulations de crises, points essentiels des recommandations du Pilier II.

### c. Le point de vue du régulateur sur l'état d'avancement actuel des banques

Dans le cadre de la mise en place des Piliers II et III, le comité de Bâle a mandaté les régulateurs locaux dans le but de faire un état des lieux des systèmes bancaires. Dans le cadre de l'évolution des normes réglementaires en matière de gestion des risques au travers des accords de Bâle II et de l'apparition des nouvelles normes comptables IFRS/IAS à compter de l'exercice 2005, en France, la Commission Bancaire française a par exemple diligenté une série d'études auprès des établissements financiers dans le but d'apprécier plus particulièrement leur risque de taux d'intérêt global. Cela s'inscrit dans la mission du régulateur de contrôle des risques bancaires et des processus associés.

Pour l'instant, en ce qui concerne la définition des périmètres, les établissements financiers éprouvent encore des difficultés à procéder à un niveau consolidé. C'est un problème d'organisation qui a des conséquences à tous les niveaux en gestion : calcul d'indicateurs de VAN, de marge, d'impasse de liquidité et de taux, allocation des fonds propres, etc. Le régulateur note également un manque de précision par exemple excluant certaines activités / filiales dont le risque de taux global serait considéré comme peu significatif, une certaine insuffisance dans les procédures de back-testing ou le caractère obsolète ou inadapté des conventions d'écoulement (notamment sur le poste des dépôts à vue).

Il existe des points d'amélioration au sujet de la mesure des risques. D'une manière générale, les méthodes utilisées ont trait au calcul du rendement moyen des actifs, du coût moyen des passifs, de l'évolution de la marge nette d'intérêt et à sa sensibilité à des scénarios de stress très standardisés (chocs de niveau et de pente sur la courbe des taux). A ce propos, les insuffisances se situent surtout aux niveaux suivants :

- une simplification jugée trop grande des classes de taux de référence, la plupart des établissements de crédit ne retenant pour l'instant que les taux fixes, les taux variables et les indexations sur l'inflation ; le régulateur préconise donc une plus grande diversité des piliers utilisés dans le calcul des indicateurs de sensibilité ; en particulier cela pose problème si on considère la prise en compte d'un unique pilier de taux pour les maturités élevées (supérieures à 15 ans) alors que la durée des prêts immobiliers, qui représentent une part significative du risque de taux global d'un établissement de crédit, va en se rallongeant et porte sur des maturités dépassant en grande majorité ce seuil ;
- des imprécisions quant à l'horizon des mesures de risque et aux règles de diffusion des chocs de taux, même si sur ce point des progrès très nets ont été notés dans les grands établissements sur les deux dernières années.

Le régulateur attend par ailleurs des banques qu'elles arrivent à progresser sur les dispositifs de contrôle interne, sur la modélisation des *produits bancaires* et sur les procédures de validation (*back-testing*) et de scénarios de crise. Toutes recommandations se retrouvent solidement étayées par les événements récents : l'affaire « Kerviel » a mis à mal la confiance en les dispositifs de contrôle interne des banques, tandis que l'inflation notable, la crise de liquidité et la hausse du prix du pétrole confirment l'importance des simulations de crise. Une amélioration jointe des systèmes d'information va de pair avec ces objectifs.

Dans la perspective du Pilier III il est également demandé aux banques d'améliorer la qualité des processus de reporting interne aux organes de direction et au sein des comités ALM.

## 4. Référentiels et normes comptables

### a. Aperçu général : l'IASB et les normes comptables IFRS / IAS

A l'échelle mondiale, c'est l'*International Accounting Standard Board* (IASB), fondée en 2001, qui est l'organisation dominante en termes de réglementation comptable. Elle est ainsi le garant de l'élaboration des normes comptables internationales, de leur application et de l'harmonisation des pratiques et du reporting autour de celles-ci. L'IASB s'appuie par ailleurs sur des instances locales aux Etats-Unis (US GAAP) et en Union Européenne (EFRAG, ARC, CESR).

Les normes comptables sont regroupées sous le nom d'*International Financial Reporting Standards* (IFRS). Ces normes se divisent pour l'essentiel en 41 normes dites IAS (*International Accounting Standards*) et en 7 IFRS. Parmi ces normes, les plus significatives dans la gestion du *Banking Book* sont :

- l'IFRS 7 (*Financial Instruments : Disclosures*) ;
- l'IAS 31 (*Financial Reporting of Interests in Joint Ventures*) ;
- l'IAS 37 (*Provisions, Contingent Liabilities and Contingent Assets*) ;
- l'IAS 39 (*Financial Instruments: Recognition and Measurement*).

D'autres normes concernent également l'ALM (IAS 16, 17, 18, 19, 21) sur des postes tels que l'activité de leasing, le change, les avantages du personnel, etc.

### b. L'IAS 39 : classification des produits financiers

Parmi les normes évoquées ci-dessus, l'IAS 39 est celle qui concerne le plus les gestionnaires actif-passif dans le sens où elle établit les règles de classifications des instruments financiers et les modes de couvertures des postes du bilan.

L'IAS 32 définit un instrument financier comme un « contrat qui donne lieu à un actif financier d'une entité et à un passif financier ou à un instrument de capitaux propres d'une autre entité ». Les normes IAS classent les instruments financiers en 4 catégories principales, les actifs et passifs financiers, les instruments de capitaux propres (IAS 39) et les produits dérivés. Ces termes sont tous définis dans le document de référence de la Commission Européenne sur la norme IAS 39 (décembre 2004). Par ailleurs, les actifs financiers sont divisés en 4 catégories impliquant des règles de comptabilisation différentes :

- les actifs détenus à la juste valeur (*fair value*) par le biais du compte de résultats ;
- les placements détenus jusqu'à leur échéance (*held to maturity* ou HtM) ;
- les prêts et créances ;
- les actifs financiers disponibles à la vente (*available for sale* ou AFS).

La première catégorie regroupe l'ensemble des actifs devant être comptabilisés à la juste valeur et les actifs détenus à des fins de *trading*, hors opérations de couverture. Les actifs HtM sont, comme leur nom l'indique, les actifs que l'établissement compte et doit garder jusqu'à maturité<sup>3</sup>. Ainsi, ils sont comptabilisés « *en couru* », c'est-à-dire que ce sont les flux générés à chaque date qui sont comptabilisés, non la valeur actuelle nette ou la *fair value*. En termes de gestion, la différence est fondamentale : l'ALM va s'efforcer de piloter l'évolution

---

<sup>3</sup> Si l'établissement veut se débarrasser d'un actif HtM avant sa date de maturité, il doit alors reclasser l'ensemble de ses actifs HtM en AFS ; il doit en particulier réévaluer tous ces actifs à la juste valeur.

du résultat en couru de ces produits, au lieu de s'intéresser à leur valeur économique, qui prend en compte les flux futurs. Par conséquent, au niveau des postes de *front-office* de l'ALM, les préoccupations se démarquent alors radicalement de leurs homologues des desks de trading en *fixed income* ou en dérivés actions par exemple.

Au contraire, les actifs AFS peuvent être vendus à tout moment par l'établissement, mais sont comptabilisés à leur juste valeur dans le bilan. Les prêts et créances, pour leur part, sont comptabilisés en couru.

### **c. Instruments dérivés et modes de couverture en IAS 39**

Les produits dérivés sont introduits au bilan depuis l'apparition des normes IFRS / IAS. Comme défini par les documents de référence des normes IAS<sup>4</sup>, un *produit dérivé* est un instrument financier (a) dont la valeur fluctue en fonction d'un sous-jacent (taux d'intérêt, prix d'un instrument financier, prix d'une marchandise, etc.), (b) qui ne requiert aucun investissement initial et (c) qui se règle à une date future.

La nouveauté en IAS 39 vient de la comptabilisation des dérivés et dérivés incorporés suivant qu'ils sont utilisés en couverture ou non. Et pour les banques, il s'agit de justifier à chaque fois la classification des produits dans tel ou tel mode de couverture. Certes, un peu à l'image des normes antérieures aux IFRS, les dérivés doivent en général apparaître au bilan comptabilisé à la juste valeur. Mais d'après l'IAS 39, ils peuvent échapper à cette règle s'ils sont utilisés comme couverture, parmi les modes que nous allons exposer ci-après.

Par ailleurs, certains produits hybrides ou composés mêlent en général un contrat classique dit « hôte » et un produit dérivé dit « incorporé ». D'un point de vue comptable, la nuance entre dérivé incorporé et dérivé utilisé à des fins de couverture peut être relativement mince. C'est pourquoi l'IAS 39 impose en général la comptabilisation des dérivés incorporés avec le contrat hôte non-dérivé, en couru ou en juste valeur selon les caractéristiques comptables de celui-ci. En d'autres termes, il est possible de comptabiliser un dérivé en couru s'il est incorporé à un contrat hôte qui se comptabilise en couru. Toutefois, si le produit dérivé peut être contractuellement séparé de son contrat hôte, l'IAS 39 prévoit qu'il doit être comptabilisé séparément, en juste valeur.

#### *Les différents modes de couverture (CFH, FVH, COFVH)*

L'IAS 39 introduit principalement deux modes de couverture : la couverture en juste valeur (*Fair Value Hedge* ou FVH) et la couverture des flux de trésorerie (*Cash Flow Hedge* ou CFH). Il est important de noter, car c'est un point critique soulevé par le régulateur<sup>5</sup>, que, dans le cas où les stratégies de couverture sont insuffisantes ou excessives (« inefficentes » dans la terminologie IAS), la norme IAS 39 prévoit la disqualification des instruments de couverture associés et ainsi leur comptabilisation à la juste valeur dans le bilan.

La couverture en flux de trésorerie consiste à couvrir les variations des *flux* d'un instrument aux mouvements adverses du marché à l'aide d'instruments adaptés. Les variations en juste valeur de l'ensemble { instrument financier + couverture } sont par ailleurs reportées sur les fonds propres. Ainsi, une couverture de type CFH, si elle stabilise la chronique des flux de

---

<sup>4</sup> Ces documents apparaissent dans le Journal Officiel de l'Union Européenne (Décembre 2004). Cf. bibliographie.

<sup>5</sup> Ce point est évoqué dans le rapport de la Commission Bancaire sur la gestion du risque de taux global dans les banques françaises, disponible sur le site Internet de la Commission Bancaire (<http://www.banque-france.fr/>).

trésorerie, crée de la volatilité sur les fonds propres. Par ailleurs, le champ des opérations pouvant être reconnues comme utilisées à des fins de CFH est limité. Entrent par exemple dans ce cadre les achats de swaptions ou de caps sur des taux courts, dans le cadre de la couverture de flux liés à des dépôts ou des crédits basés sur les taux courts.

La couverture en juste valeur consiste à couvrir les variations de la *juste valeur* d'un instrument financier aux mouvements adverses du marché. Les mouvements liés à la variation de valeur de l'ensemble { instrument financier + couverture } sont comptabilisés dans le compte de résultat. C'est l'effet inverse de ce qu'on observe dans le cas de la couverture CFH : la juste valeur est stabilisée alors que de la volatilité se crée sur le compte de résultat. Dans le cas particulier des dépôts à vue, en Union Européenne, il existe un mode de couverture adapté, comme son nom l'indique, appelé *Carved-Out Fair Value Hedge*. Il s'agit d'une mesure autorisant la couverture des dépôts à vue en juste valeur sur la base d'un échéancier statistique d'écoulement des dépôts à vue de l'établissement. Notons que cet aménagement n'existe pas aux Etats-Unis dans les normes US GAAP.

Dans le cas des dépôts à vue toujours, l'IASB réfléchit à la conception d'un mode de couverture basé sur les marges nettes de taux d'intérêt, appelé *Interest Margin Hedge* (IMH). L'idée est de permettre aux banques d'utiliser des produits dérivés comme les swaps dans le but de couvrir les marges de taux d'intérêt dues au placement des encours de dépôts sur les marchés de taux. Ainsi les couvertures pratiquées se rapprocheraient des couvertures de type CFH car le but affiché serait d'insensibiliser les marges de taux d'intérêt aux mouvements du marché.

## Chapitre 4. Organisation de la gestion interne des risques

### 1. L' ALM – Asset and Liability Management

L'ALM est une entité intervenant au niveau du groupe. Dans cette section, nous donnons un aperçu d'ensemble du rôle de l'ALM, ses moyens d'actions, les indicateurs qui gouvernent son activité.

#### a. Le rôle de l'ALM

L'ALM prend en charge la gestion d'une grande part des risques financiers sur le *Banking Book*, dont les risques de taux d'intérêt, de liquidité et de change. Parmi les risques qui ne sont pas pris en charge par l'ALM, les risques opérationnels sont du ressort des instances de contrôle interne ou des services techniques ou administratifs, tandis que les risques commerciaux (de contrepartie sur la clientèle, etc.) sont davantage du ressort des unités commerciales. En revanche, l'ALM a en charge principalement les *risques de transformation* qui comprennent risque de taux, de change et de liquidité. Son rôle est alors d'appréhender la contribution de chacune des activités à la position globale en ce qui concerne le risque et de délimiter la frontière en termes de responsabilités entre *Banking Book* et *Trading Book*. L'ALM matérialise cette dernière idée par le partage de la marge de transformation à l'aide des mécanismes de *taux de cession interne* (TCI) et d'*allocation notionnelle des fonds propres* aux différentes entités entrant dans son cadre d'action.

Dans ce but, les objectifs généraux de l'ALM traitent :

- de la rentabilité et du niveau des fonds propres ;
- de la croissance du bilan ;
- du lissage des volumes d'activité et des résultats.

Ainsi, elle doit définir les contours de la *politique financière de l'établissement* en précisant les principes de gestion et les limites des risques financiers à sa charge (taux, liquidité, change) ainsi que les mécanismes de taux de cession interne et d'allocation des fonds propres associés. Ces principes généraux sont en général consignés dans une documentation que les établissements financiers transmettent aux instances de contrôle du régulateur, à savoir principalement la Commission Bancaire (CB) pour ce qui est de la France.

#### b. Mesure de marge et de valeur en ALM

Dans la mise en œuvre opérationnelle de ces grands principes, l'ALM fait appel à des indicateurs qu'on peut regrouper en deux principales catégories : les mesures de *marge* et de *valeur*. Chaque calcul de la sensibilité de l'établissement à tel ou tel type d'indicateur peut concerner ces deux approches complémentaires. En effet, l'approche en valeur correspond à une mesure de l'impact sur la valeur des fonds propres (ou de l'actif net). L'approche en marge s'intéresse plutôt aux résultats courants.

Les revenus pris en compte en ALM proviennent en effet :

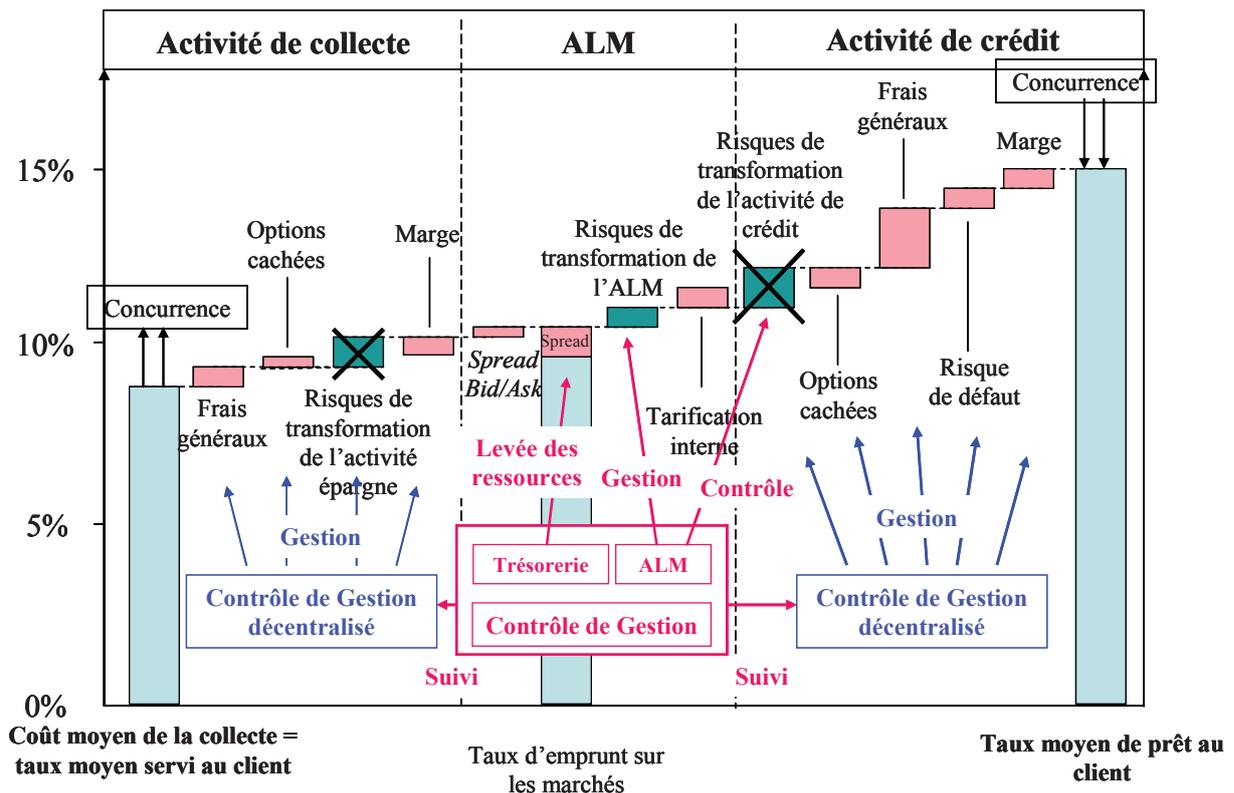
- soit de l'activité intermédiation, où ils se traduisent dans les résultats courants par des *marges d'intérêt* et des commissions ôtés des frais de gestion ; en valeur, cela se traduit par l'actualisation des flux futurs de marge *sous l'hypothèse de cessation d'activité* (valeur du *stock*) ;

- soit de l'activité de placement qui peut concerner les titres dans le cadre de l'activité de portefeuille ou de marché, ainsi que les immobilisations. En termes de résultats courants, cela se traduit par des revenus (dividendes, loyers, plus ou moins-values de portefeuille, etc.) et en valeur, l'activité de placement se traduit par la valeur de marché (*mark to market*) des opérations cotées ou la valeur des actifs non cotés en ce qui concerne les immobilisations.

La *mesure de marge* prend en compte la *marge de transformation* c'est-à-dire d'une part le différentiel de taux entre les conditions auxquelles les crédits sont refinancés et le taux moyen demandé aux emprunteurs et d'autre part les conditions auxquelles les ressources sont placées, ôtées de leur taux de rémunération à la clientèle. A partir de celle-ci, le gestionnaire calcule son *résultat courant* et peut en déduire des *indicateurs de sensibilité* par rapport aux données de taux, de change, etc. en évaluant sa variation à des chocs sur ces données. L'utilisation de la mesure de marge permet de tracer la *chronique des flux* à laquelle il faut intégrer une bonne appréhension des options.

En d'autres termes, la marge de transformation incorpore l'ensemble des *marges d'exploitation* sur les différentes activités. Sur un crédit par exemple, la marge d'exploitation se décompose de la façon suivante, en taux, sur l'ensemble de la chaîne d'intermédiation :

	Effet
Taux du crédit	+
Coût de la ressource	-
<b>= Marge financière</b>	
Coût financier du risque de défaut clientèle (déterminé en fonction du score)	-
Frais de gestion et de commercialisation	-
Coût des options cachées	-
Commissions :	
- perçues	+
- versées	-
<b>= Marge d'exploitation</b>	



**Figure 4.1. Décomposition de la marge d'exploitation en collecte et en crédit et contrôles de gestion associés.** La partie gauche du schéma précise la décomposition de la marge d'exploitation sur la collecte de ressources, la partie droite, sur l'octroi de crédits. Le message véhiculé par ce schéma est que l'ALM assume l'ensemble des risques liés à la transformation. Pour un crédit classique, l'activité de collecte peut se résumer à l'activité de levée de fonds sur les marchés ou auprès d'investisseurs. Mais parfois, le crédit est financé par des dépôts de la clientèle : c'est ce qu'on retrouve au sein de filiales nouvellement créées dans des marchés émergents, où la collecte de dépôts est une source de liquidité à moindre coût, privilégiée pour le crédit.

Comme nous l'avons déjà évoqué, la *mesure de valeur* incorpore un processus d'*actualisation*, c'est-à-dire que la valeur des fonds propres correspond à la valeur actuelle nette (VAN) des flux financiers futurs sur l'actif net du passif. Ce calcul inclut la valorisation des options implicites et explicites. Des indicateurs de sensibilité aux données de taux et de change peuvent également être élaborés sur cette mesure de valeur. Cet indicateur présente l'avantage d'être particulièrement synthétique ; toutefois, il offre peu de visibilité sur la chronique des résultats : il peut tout à fait afficher une sensibilité très faible alors que le profil de résultat associé est très irrégulier. Cet effet est dû aux éventuels effets de compensation apparaissant en sommant les valeurs actuelles des flux futurs.

Cela dit, la tendance actuelle en faveur de la *full fair value* milite pour l'indicateur de valeur. Celui-ci se révèle en effet particulièrement adapté à la prise en compte des options du bilan (produits dérivés, options de taux, etc.) et à l'utilisation de méthodes mathématiques d'évaluation à l'image de ce qui se pratique sur les marchés financiers, sur la base de l'absence d'opportunité d'arbitrage. C'est également la réserve qu'on peut émettre quant à l'indicateur de valeur : est-il réellement pertinent d'évaluer une activité de la même manière qu'un produit financier sachant que son prix de cession laisse la part belle aux anticipations subjectives du vendeur et de l'acquéreur quant aux flux futurs générés ?

Enfin, le calcul de la mesure de valeur requiert des systèmes d'information relativement performants afin de permettre la prise en compte d'un très grand nombre de flux sur des

activités multiples et corrélées, avec une méthode de calcul basée sur la simulation d'un nombre important de scénarios futurs.

### **c. L'éclatement notionnel de l'activité de l'établissement**

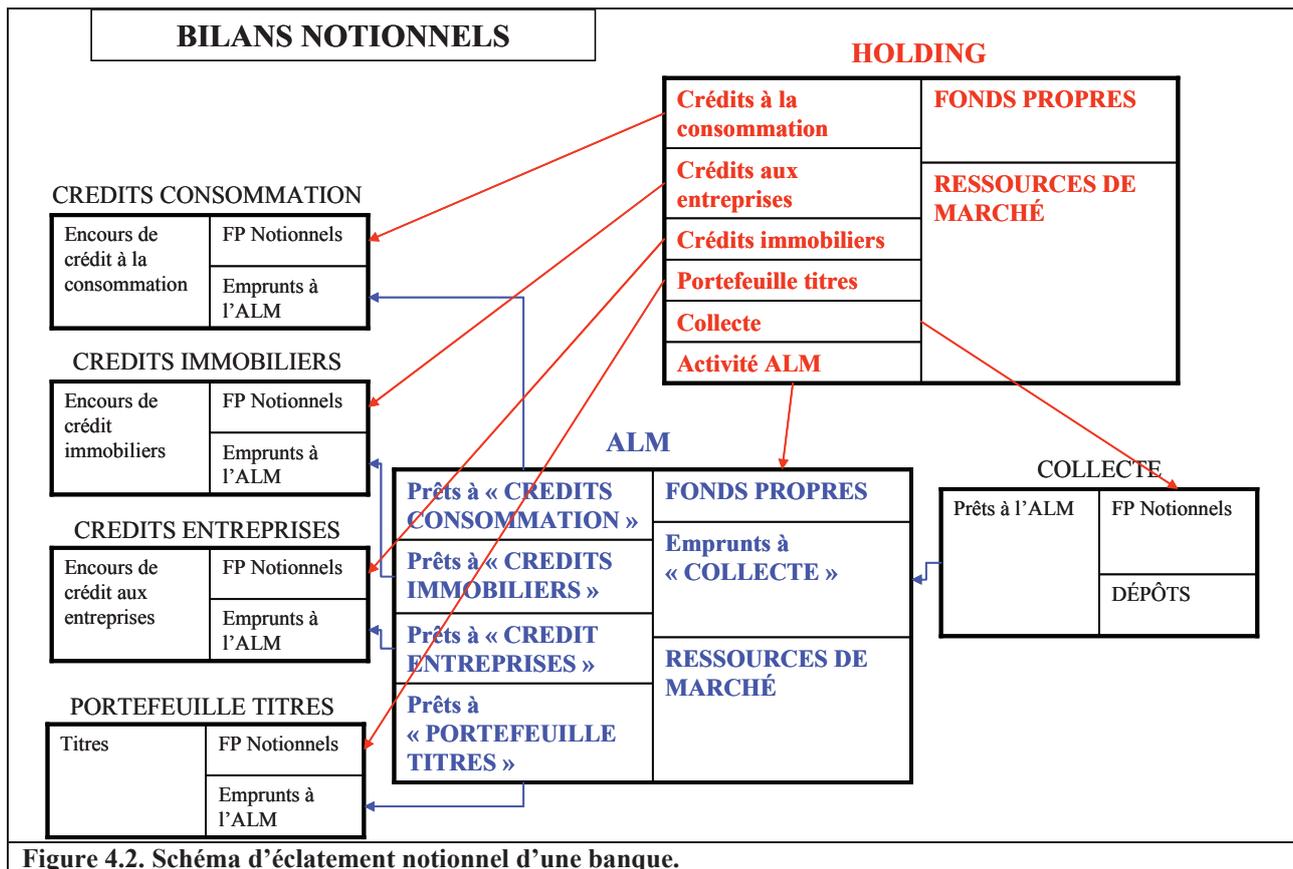
L'éclatement notionnel est un concept théorique consistant à séparer les entités et les activités au sein d'un groupe. En d'autres termes, un groupe est composé de filiales qui ont chacune de multiples activités : l'éclatement notionnel consiste en la définition de cette arborescence. Dans le cas le plus élémentaire, on peut alors séparer activité de crédit et activité de dépôt, en éclatant analytiquement les frais de gestion entre les deux activités, et en imaginant deux secteurs distincts, de crédit et de collecte. C'est au milieu de ces deux entités virtuelles qu'intervient l'ALM, puisque sur le principe, l'activité de crédit vient se refinancer auprès de l'ALM à un taux correspondant à la structure de son actif et l'activité de collecte vient placer ses ressources auprès de l'ALM de la même manière.

Le but recherché est de faire supporter la transformation (i.e. le placement de ressources courtes sur des horizons longs ou le refinancement de crédits longs à des taux court, etc.) à l'ALM et à assurer une marge commerciale figée dans le temps. Les taux de cession interne sont d'ailleurs construits dans ce but. L'absorption des risques de transformation par l'ALM a alors un impact sur la répartition de la marge financière.

Ce modèle d'éclatement notionnel place donc l'ALM au milieu des centres de profit « collecte » et « crédit ». Celle-ci prend en charge la marge de transformation et les risques qui y sont associés, tout en contrôlant que les principes d'adossement définis auprès des deux autres centres de profit sont bien respectés, ainsi qu'à la cohérence du partage des frais généraux entre crédit et collecte. En fait, rappelons toutefois que la division en centres « collecte » et « crédit » est purement théorique puisque les deux activités sont en général localisées au même endroit et assurées par les mêmes personnes au sein de chaque branche du réseau ou de chaque filiale. Mais l'idée sous-jacente est la gestion séparée des flux liés aux différentes activités : en ce sens, la collecte et le crédit sont deux activités différenciées en gestion.

Par ailleurs, l'ALM est bien un *centre de profit* dans la mesure où elle est à même de prendre des marges de tarification interne (*spread* entre les taux de cession interne) destinées à couvrir ses frais de gestion et les risques supplémentaires pris dans le cadre de son activité de transformation. Dans ce modèle, l'ALM prend en charge l'ensemble des risques financiers alors que les risques commerciaux (options et contrepartie clientèle) sont traités par les entités opérationnelles.

Dans ce modèle, on est enfin obligé de concevoir le niveau du groupe (*holding*), englobant les trois centres de profits précités et dont la mission serait de rassembler les fonds propres sur l'ensemble de l'établissement bancaire et de les allouer conséquemment à chacun des centres « collecte », « crédit » et « ALM ». De même dans un cadre plus général, le bilan type d'une banque prend en compte divers sortes de crédits et de dépôts, impliquant un modèle d'éclatement notionnel plus complexe, comme indiqué dans le schéma ci-dessous, avec une ALM centralisée. C'est le modèle le plus répandu aujourd'hui, à des degrés d'application divers.



## 2. Le Risk Management

Le *Risk Management* est une *fonction* transversale du niveau groupe, chargée de mesurer et de contrôler les risques pris par les différents pôles et d'imposer des limites sur ces risques. Ainsi, le *Risk Management* assure une double fonction de mesure du risque et d'audit au niveau de toutes les unités de gestion du groupe. Son rayon d'action englobe donc en particulier l'ALM.

Dans son organisation, le *Risk Management* assigne une division à chaque type de risque, et chacune se décline parfois par pôle ou zone géographique. Ainsi on trouve des équipes consacrées entre autres aux risques de marché, au risque de liquidité, au risque de crédit (décliné par zone géographique), au risque opérationnel et au risque de portefeuille (pour les activités de portfolio management).

La mission principale du *Risk Management* est d'intégrer les activités de l'ALM dans les indicateurs de risque du groupe, notamment dans le calcul du capital économique. Il s'agit donc pour l'essentiel de mesurer les risques associés au *Banking Book*, donc en particulier d'étudier le risque porté par le résultat comptable.

Comme nous l'évoquons, les tâches du *Risk Management* vis-à-vis de l'ALM vont au-delà. En effet, il assure aussi un audit des modèles et des pratiques de l'ALM, en vérifiant la pertinence des bases de données utilisées, la validité des hypothèses, la forme des modèles, l'estimation des paramètres associés et les résultats obtenus. Quant aux pratiques de gestion (portefeuille de couverture de l'ALM, adossement des emplois aux ressources, taux de

cession interne), le *Risk Management* vérifie qu'elles suivent la ligne définie lors des ALCO (cf. plus loin) et qu'elles sont conformes aux attentes des régulateurs. Il assume ainsi un deuxième rôle, celui d'auditeur interne indépendant, tout comme l'inspection générale (cf. paragraphe suivant).

Cependant, la différence entre ces deux fonctions réside dans la nature des missions, car l'inspection générale n'inclut par exemple pas de calcul d'indicateur de risque dans ses prérogatives, et dans la précision du suivi. En termes de fréquence du contrôle, le *Risk Management* intervient à intervalles de temps rapprochés (de l'ordre du trimestre sur chaque sujet) et en termes de précision dans les tâches d'audit, il vérifie jusqu'aux moindres détails de l'activité de l'ALM. De fait, c'est ainsi le premier garant des bonnes pratiques du métier.

Il n'est plus question aujourd'hui de remettre en cause la légitimité des fonctions de *Risk Management* au sein des banques. En effet, les crises successives et les directives réglementaires ont poussé les établissements à se munir de procédures de contrôle et de gestion des risques indépendantes et d'une précision extrême. Le *Risk Management* cristallise ces exigences et son placement au niveau groupe dans l'organisation est nécessaire car il lui permet d'avoir un regard sur l'ensemble des activités de la banque.

Son statut de fonction est également essentiel, puisque par définition il exclut toute forme de création de valeur directe, au contraire d'un centre de profit comme l'ALM<sup>6</sup>. Ainsi, son activité n'est pas motivée par une quelconque exigence de rendement à intégrer au résultat de la banque, au premier ordre en tout cas. Car de manière indirecte, il est clair que les tâches accomplies par le *Risk Management* ont un impact non négligeable sur les résultats du groupe.

### **3. L'audit interne – l'inspection générale**

L'inspection générale est une *fonction* intervenant au niveau du groupe, qui tient également un rôle d'*auditeur interne*. Elle est chargée de rendre compte de manière indépendante de la bonne mise en place, de la validité et du bon fonctionnement des procédures de gestion des risques. Ceci inclut notamment la construction des modèles, la pertinence et la fiabilité des systèmes de gestion des risques et leur conformité avec les attentes du régulateur. En quelque sorte, c'est un organe qui chapeaute à la fois l'ALM et le *Risk Management* ; en ce qui concerne l'ALM, elle effectue un contrôle supplémentaire sur ses procédures de gestion.

Ainsi, au niveau de l'ALM, l'inspection est censée apporter une garantie sur l'excellence des procédures de gestion des risques. Son examen inclut donc l'audit des systèmes d'information, en vérifiant notamment la disponibilité des données en temps voulu, un élément essentiel à la fluidité des mécanismes de gestion. L'inspection s'intéresse également aux modèles, en vérifiant la pertinence des hypothèses, la fiabilité des données utilisées, les méthodes d'estimation des paramètres, etc. Son action s'étend ainsi au calcul du capital économique et aux indicateurs de marge / valeur et leurs sensibilités.

En plus de cela, l'inspection s'appuie sur la documentation ; elle doit donc s'assurer de sa bonne mise à jour, de sa disponibilité et surveiller la tenue d'un échéancier de révision et d'enrichissement des modèles. Elle doit également s'assurer de la pertinence de l'organisation en termes de *reporting*.

---

<sup>6</sup> Il faut modérer cette affirmation, puisqu'à ce jour, toutes les ALM des banques n'ont pas forcément ce statut de centre de profit. Leur placement dans l'organisation du groupe est en lui-même très divers.

En fait, toutes ces missions correspondent à une certaine attente du régulateur, notamment en termes de revue de la procédure de gestion des risques et de sa documentation. L'existence même d'une fonction d'audit interne, indépendante, est une exigence du régulateur ; ainsi le rapport de l'inspection générale est un document de référence pour lui.

## Chapitre 5. La mise en œuvre de l'ALM

### 1. Une organisation hiérarchique

L'ALM apporte des informations déterminantes dans les choix stratégiques, sur les marges réalisées par chaque activité, par chaque produit, ainsi que sur la sensibilité de la banque aux conditions de marché et sa performance économique. L'organisation doit donc permettre de procéder à la fois à la remontée de l'information, à son analyse financière et à l'élaboration de la stratégie du groupe. Pour cela, on distingue les instances de décision des équipes dédiées aux tâches de gestion actif-passif.

Les instances de décision se matérialisent essentiellement à travers :

- un *organe de direction* (conseil d'administration, direction générale, comité exécutif ou autre), forme d'« instance suprême » composée des dirigeants du groupe et éventuellement des filiales ; elle est chargée d'effectuer des choix stratégiques, fixant les grands principes de l'ALM (taux de cession interne, principe et limites de la gestion des risques financiers et allocation des fonds propres) et de la planification des diverses opérations de financement et de couverture – *micro-couverture* dans le cas de programmes de refinancement et de titrisation, *macro-couverture* dans le cas de programmes de couverture globale ;
- un *comité de gestion actif-passif* (ALCO, pour *ALM Committee*), instance collégiale composée par exemple d'un membre de la direction générale, d'un ou plusieurs représentants de l'ALM, de responsables de la trésorerie, du directeur comptable, d'éléments du contrôle de gestion et du *Risk Management* entre autres ; sa composition varie en fonction du degré d'autorité qu'on veut lui conférer ainsi que des spécificités de l'établissement ; sa vocation est d'effectuer des choix tactiques en cohérence avec les choix stratégiques élaborés au niveau de l'organe de direction ; le comité définit les volumes d'intervention sur les marchés financiers, à une fréquence classiquement de l'ordre du trimestre.

Tous les éléments stratégiques puis tactiques définis au niveau des instances de décision sont ensuite passés en réalisation auprès des *équipes dédiées à l'ALM*. Chapeautées par une cellule ALM centrale, elles comprennent une trésorerie, une cellule titrisation, des équipes d'ALM décentralisées et parfois également une équipe de recherche et développement.

La *cellule ALM centrale* a un pouvoir propositionnel auprès de l'organe de direction, puisqu'elle prend l'initiative sur les questions de politique de gestion actif-passif, en proposant par exemple des évolutions de ses règles pour les adapter aux modifications de l'environnement. Elle procède ensuite à l'éclatement notionnel du bilan, au travers l'allocation notionnelle de fonds propres et la définition des taux de cession interne. Elle se charge également de la mise en œuvre de la gestion actif-passif, en définissant les volumes de couverture et d'intervention sur les marchés, c'est-à-dire en mettant en œuvre l'ensemble des choix tactiques que nous avons évoqué ci-dessus.

La *Trésorerie* est en quelque sorte le bras armé de l'ALM, puisqu'elle se charge d'effectuer les opérations de marché relatives à ses choix tactiques. On la divise parfois en plusieurs organes, suivant le terme des opérations effectuées, suivant qu'il est court ou long, comme

nous l'évoquerons au paragraphe suivant. La présence d'opérateurs de marché au sein de l'ALM lui permet de ne pas avoir à assumer de coûts supplémentaires à cause d'une externalisation des opérations de marché sur des postes de *fixed income* par exemple. Elle permet également d'adapter le pilotage du résultat aux conditions de marché de façon plus réactive et moins coûteuse.

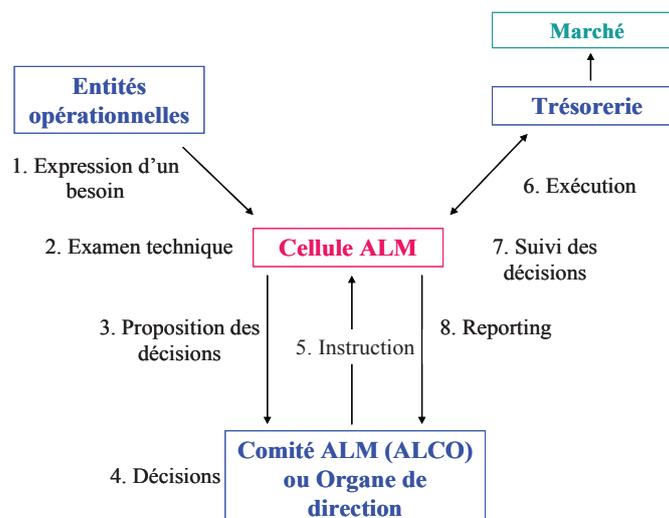
L'*équipe titrisation* se charge du montage des opérations de titrisation, d'effectuer les simulations nécessaires pour mesurer le risque pris sur les portefeuilles définis, choisir la structure adaptée, négocier avec les agences de notation, etc. jusqu'au lancement sur le marché de l'opération. Le but est d'arriver à obtenir des sources de financement à moindre coût en privilégiant l'émission de dette à des *spreads* plus avantageux que des émissions de dette classiques. Dans les procédés de titrisation actuels, on compte par exemple des émissions de *Covered Bonds* et des titrisations de créances commerciales. La raison de la présence de la titrisation au sein de l'ALM se justifie par la nature des produits titrisés, car il s'agit souvent de créances à des particuliers (crédits à la consommation, crédits immobiliers, etc.). De plus, c'est une source de financement de long terme.

Enfin, les *équipes de gestion actif-passif décentralisées* sont des équipes localisées dans certaines entités opérationnelles et dont le rôle serait de gérer les marges d'intermédiation de leur secteur (frais généraux, risques financiers, risques commerciaux, marge d'exploitation).

La présence d'une équipe de recherche et développement se justifie au sein de l'ALM dans un rôle d'élaboration de modèles pour la détermination de stratégies de couverture, dans la résolution de programmes d'optimisation pour l'ALM et dans une mission de veille technologique. Par exemple une « meilleure » modélisation des éléments du bilan permet d'améliorer les stratégies de couverture associées ; l'impact d'une équipe de modélisation sur la création de valeur de l'ALM peut donc être assez significatif.

## 2. Le processus de décision

Le schéma suivant permet de mieux saisir les acteurs et leur rôle au sein du processus de décision.



**Figure 5.1. Exemple de processus de décision en ALM.** Nous donnons ici l'exemple d'un processus de décision ayant pour origine l'expression d'un besoin par les entités opérationnelles. En réalité, l'initiative peut venir de toutes les composantes de la chaîne d'intermédiation et de l'organigramme. La multiplicité des comités

entre ces composantes facilite la circulation des idées.

Dans certains établissements bancaires, la cellule ALM intègre parfois certaines des tâches opérationnelles normalement dédiées à la Trésorerie, selon le schéma de la Figure 5.1. Ainsi elle prend à son compte les opérations de « long terme » (liées à des horizons supérieurs ou égaux à 6 mois) alors que sont laissées à la Trésorerie les opérations de plus court terme (inférieur ou égal à 6 mois). Cela permet à l'ALM de concentrer stratégie et tactique sur les postes importants du *Banking Book* (dépôts à vue, crédits immobiliers, crédits à la consommation, épargne logement) et sur des horizons dits « longs », cohérents avec sa vocation à stabiliser le résultat du *Banking Book* au fil des ans.

En effet, étant donné qu'une grande part du montant des placements et des emprunts, en pratique, s'effectue sur le long terme, l'ALM conserve cette partie, sur la partie financement et investissement et peut se permettre d'« externaliser » l'ensemble des opérations de court terme, destinées à faire l'objet de transactions plus fréquentes, en réaction aux conditions de marché. Ceci explique l'existence d'une Trésorerie divisée entre court terme et long terme dans certains établissements.

### 3. Les indicateurs de gestion

En ce qui concerne la réalisation, le travail de la gestion actif-passif fait ensuite intervenir des indicateurs de gestion et des systèmes d'information que nous allons détailler maintenant.

Les indicateurs de gestion se divisent par type de risque (taux, change, liquidité) et sont multiples : impasse (de taux ou de liquidité), valeur actuelle nette (VAN), sensibilité de VAN, sensibilité de marge et ratios réglementaires.

Ces indicateurs sont efficaces s'ils sont examinés de manière complémentaires, comme nous le disions dans les chapitres précédents, car ils sont plus ou moins adaptés à la nature des risques pris en compte, comme le montre le tableau suivant (Tableau 5.2).

Risques couverts	Taux	Change	Liquidité
Impasse	X		X
VAN	X	X	
Sensibilité de VAN	X	X	
Sensibilité de marge	X	X	
Ratios réglementaires	X	X	X

**Tableau 5.2. Les principaux indicateurs de gestion et leur périmètre d'application.**

Le risque de liquidité est encore traité de manière très sommaire dans la plupart des établissements mais la crise récente a permis de motiver des études sur ce sujet. A ce propos, les travaux internes en sont encore aux balbutiements, puisque l'intérêt pour le risque de liquidité est un phénomène très récent. Il s'agit donc pour les ALM bancaires d'identifier les facteurs du risque de liquidité, les points du bilan qui sont impactés par celui-ci et de produire des indicateurs de ce risque.

On s'aperçoit que d'une manière générale, la réflexion sur les indicateurs de gestion, leur méthode de calcul et leur mise en place dans les procédures internes dépasse naturellement le

cadre de la seule ALM. Ainsi, il concerne également les instances de contrôle de gestion comme le *Risk Management*.

#### **4. Les systèmes d'information**

Le système d'information est la clé de voûte de l'ALM dans sa mission d'analyse, puisqu'elle est amenée à modéliser les différents éléments du bilan dans une base potentiellement évolutive. Pour cela, l'ALM se retrouve obligée de rassembler dans une même application des données provenant de systèmes souvent bien différents les uns des autres.

Les enjeux se situent alors à la fois dans la question de la transmission de l'information que dans son organisation. Sur ce dernier point, la pratique va à une différenciation par filiale et par produit, c'est-à-dire qu'il existe des bases consacrées à chacune des filiales, disposant souvent de leur propre système d'information – même si on tend vers une uniformisation de ceux-ci au niveau groupe – bases qui elles-mêmes se divisent en sous-bases traitant chacun des produits de ladite filiale.

Etant donné une filiale et un type de produit, avec les progrès technologiques, les grands établissements bancaires sont en passe d'avoir à leur disposition des bases de données unitaires, c'est-à-dire des bases client par client. Dans ces conditions, de telles bases posent des problèmes en raison de leur taille : il est difficile à la fois de les constituer, de les exploiter et de les rendre évolutives (il faut en effet être capable d'adapter la forme des bases à l'environnement économique, commercial et réglementaire). Le problème de l'évolutivité des bases est donc liée à celui de la transmission, par conséquent il est vital pour l'ALM que des coûts soient consentis sur la partie informatique, pour la mise en place de serveurs et d'interfaces performants.

Par exemple, des bases unitaires pour les dépôts à vue du réseau d'une grande banque, on peut atteindre plusieurs millions de contrats. L'utilisation en production de bases de données contenant des informations de date d'ouverture, d'encours, de devise, de taux client, etc. sur des millions de contrats est encore trop difficile, mais des efforts sont menés dans cette direction. Ainsi, il est déjà possible de les exploiter au niveau des équipes de recherche, afin d'y étudier par exemple certains aspects du comportement de la clientèle.

## **Partie II - Mesures de risque et optimisation de portefeuille**

## Introduction

Depuis les années 1950, la théorie du risque constitue une science axée sur l'étude des comportements d'agents économiques face à des situations de choix en présence d'aléa :

- elle s'intéresse entre autres aux problèmes de classement préférentiel de loteries, c'est-à-dire à la façon dont les agents économiques vont préférer telle situation incertaine à telle autre ;
- elle donne des méthodes de quantification des risques pris ;
- elle étudie la compatibilité de ces méthodes de quantification avec des hypothèses de comportement de l'agent.

La théorie de l'utilité espérée est un jalon majeur dans l'évolution de la pensée sur le sujet ; elle est énoncée par Von Neumann et Morgenstern dans les années 1950. Se basant sur l'hypothèse que chaque agent existe une relation d'ordre totale sur l'ensemble des loteries, relation obéissant à un certain nombre d'axiomes, elle caractérise alors le mode de sélection de l'agent à l'aide d'une fonction d'utilité. L'agent est alors capable d'évaluer les loteries qui se présentent à lui – à une transformation croissante affine près. Suivant les hypothèses de von Neumann et Morgenstern, la fonction d'utilité caractérisant les préférences de l'agent est alors continue, croissante, concave.

Les mesures de risque sont une extension de la théorie de l'utilité espérée, puisqu'elles visent à rendre compte du risque contenu dans chaque loterie à l'aide d'une fonction associant une quantité à chacune d'entre elles. De nombreux travaux s'inscrivent dans ce courant, notamment Yaari (1987), puis Denneberg (1990), Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999), Föllmer et Schied (2002) etc. L'idée de ces travaux est de caractériser la forme de cette fonction suivant les hypothèses qu'on attribue à la mesure de risque. Les hypothèses varient d'un auteur à l'autre, nous tâcherons, entre autres, de faire le point sur cette question dans le Chapitre 6.

Suite à la théorie de l'utilité espérée, la littérature scientifique s'attachera à remettre en cause les axiomes, dits « de rationalité », établis par von Neumann et Morgenstern, notamment avec les travaux de Kahneman et Tversky (1979), regroupés sous le nom de *Prospect Theory*. S'appuyant sur un sondage pratiqué sur une population d'étudiants, leur étude remet les axiomes de l'utilité espérée en question, mettant en évidence :

- une propension des agents économiques à attribuer une préférence systématiques aux loteries certaines sur les autres loteries (*certainty effect*) ;
- une tendance des agents à se montrer averses au risque pour les gains et avides de risque pour les pertes (*reflection effect*) ;
- des choix contraires de la part des agents sur des loteries aux règles différentes mais offrant pourtant des gains équivalents avec les mêmes probabilités au final (*isolation effect*).

Une conséquence de cela est la modification de la forme de la fonction d'utilité : elle se caractérise alors par une rupture de concavité à l'origine (convexité sur les pertes / concavité sur les gains), parfois assortie d'une rupture de pente.

En gestion d'actifs, les théories de l'utilité espérée et de la mesure du risque trouvent leur application dans le problème d'optimisation de portefeuille et dans la représentation des choix de gestionnaire. En général, cela consiste à caractériser le comportement des gérants de portefeuille par une fonction d'utilité ou une mesure de risque ; l'objectif du gestionnaire est alors de déterminer la stratégie d'investissement optimale dans ce cadre. Un des pionniers sur la question est Markovitz (1952) et ses travaux sur l'optimisation de portefeuille pour un gestionnaire à fonction d'utilité quadratique, font toujours autorité de nos jours. C'est un point que nous abordons spécifiquement dans le Chapitre 7.

Une stratégie d'investissement peut se concevoir dans plusieurs dimensions. Elle peut se concevoir dans une dimension spatiale, c'est-à-dire dans le choix de l'allocation parmi un ensemble d'actifs, et également dans une dimension temporelle, c'est-à-dire en s'intéressant à l'aspect dynamique des stratégies d'investissement. Dans cette section, nous aurons l'occasion de discuter du premier point, à savoir du choix de l'allocation optimale sous différents critères de risque, chacun représentatifs d'un comportement de gestionnaire. La question de la dimension temporelle, c'est-à-dire de la mesure intertemporelle des risques, dépasse le cadre de cette thèse.

La seconde partie de cette thèse s'organise en deux chapitres. Le Chapitre 6 concerne la mesure du risque d'un point de vue théorique. Nous y exposons les différentes approches sur la question et évoquons un certain nombre de propriétés et de résultats de représentation. Le Chapitre 7 traite plus spécifiquement du problème d'optimisation de portefeuille sous contrainte de mesure de risque. Nous y décrivons et formalisons les programmes d'optimisation. Nous illustrons également leur résolution au travers de l'exemple de la mise en place de portefeuille optimaux de fonds spéculatifs (*Hedge Funds*) puis de portefeuilles optimaux d'actions issues du secteur bancaire.

## Chapitre 6. Mesure du risque – Aspects Théoriques

### 1. Préliminaires et notations

Le but de cette sous-section est d'établir le cadre dans lequel nous allons mener notre étude sur les mesures de risque. Nous introduisons toutes les notations que nous utiliserons dans ce chapitre et dans le suivant. Ainsi nous évoquons la notion de rendement aléatoire d'une activité ou d'un portefeuille, à laquelle nous appliquons l'ensemble des mesures et des résultats de ce Chapitre 6. Nous établissons également les notations qui nous serviront lors de l'application au problème d'optimisation de portefeuille traité au Chapitre 7.

#### a. Représentation du risque en gestion de portefeuille – Estimateurs empiriques et cadre probabiliste.

Nous nous donnons un ensemble de  $m$  actifs risqués dont on considère le rendement sur un horizon de temps donné. Plus tard, notre étude empirique prendra par exemple en compte des rendements mensuels. On considère une réalisation historique  $\{r_1, \dots, r_n\}$  du processus  $(R_t)_{1 \leq t \leq n}$  où  $R_t = (R_t^1, \dots, R_t^m)$  représente le vecteur des rendements de chaque actif à la date  $t$ .  $(Y_t)_{1 \leq t \leq n}$  est donc un processus vectoriel à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ . On note ainsi  $r_t = (r_t^1, \dots, r_t^m)$  pour chaque réalisation à la date  $1 \leq t \leq n$  du vecteur des rendements. Ces actifs peuvent tout à fait également représenter des activités pour lesquelles on aurait défini un rendement sur une période donnée (mensuelle, trimestrielle, annuelle).

Nous allons ainsi constituer des portefeuilles composés de ces  $m$  actifs en des proportions déterministes. Chacune d'elles sont représentées par un vecteur  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$  : un portefeuille est donc caractérisé par son allocation  $a$ . Pour un portefeuille associé à la composition  $a$ , on note alors  $\Pi(a) = \left( \Pi(a)_t = \sum_{k=1}^m a_k R_t^k = a' R_t \right)_{1 \leq t \leq n}$  le processus (à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) de ses rendements aléatoires et  $\pi(a) = \left( \pi(a)_t = \sum_{k=1}^m a_k r_t^k = a' r_t \right)_{1 \leq t \leq n}$  sa réalisation historique étant donné celle des rendements des actifs  $\{r_1, \dots, r_n\}$ . Comme évoqué précédemment, le concept de portefeuille d'actifs peut être élargi à celui de portefeuille d'activités, pour peu qu'un rendement sur une période donnée ait été défini pour chacune d'entre elles.

Pour estimer la loi de probabilité de ces rendements de portefeuille, nous allons faire l'hypothèse que processus  $(R_t)_{1 \leq t \leq n}$  est strictement stationnaire ; ainsi nous allons considérer la mesure du risque du point de vue des lois marginales. Dans le cas où l'hypothèse de stricte stationnarité ne peut être vérifiée, il faut avoir recours à des estimateurs des lois conditionnelles, à l'image de ce qui est fait dans Scaillet (2005) par exemple. Pour estimer la loi de probabilité du rendement de portefeuille  $\Pi(a)$  à chaque date, nous allons de plus nous intéresser à l'estimateur empirique  $F_{\Pi(a)}^{emp}$  de sa fonction de répartition défini à l'aide du vecteur de ses réalisations historiques  $\pi(a)$  de la manière suivante :

$$F_{\Pi(a)}^{emp}(x) := \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \mathbf{1}_{[\pi(a)_t, +\infty[}(x).$$

Comme une fonction de répartition classique, cet estimateur est continu à droite avec une limite à gauche en tout point (càdlàg), c'est aussi une fonction en escalier croissante.

**Remarque :** Tous les portefeuilles élaborés sur la base des  $m$  actifs initiaux ont une loi de probabilité connue si on connaît la loi de probabilité du processus  $(Y_t)_{1 \leq t \leq n}$ . Plus précisément, la réalisation historique d'un portefeuille à la date  $t$  est fonction de la seule réalisation historique  $y_t$  de  $Y_t$ . Par conséquent, notre cadre empirique est parfaitement équivalent à un cadre probabiliste  $(\Omega, \mathbf{A}, \mathbf{P})$  où  $\Omega$ , l'espace d'états, est fini de cardinal  $n$ ,  $\mathbf{A}$  est la tribu associée,  $\mathbf{P}$  est la mesure uniforme sur  $\Omega$  et où pour tout  $1 \leq t \leq n$ ,  $Y_t$  est représenté par la variable aléatoire vectorielle  $\bar{R}$ , de dimension  $m$ , définie par  $\bar{R}(\omega_1) = r_1, \dots, \bar{R}(\omega_n) = r_n$ . En effet dans ce cadre, la fonction de répartition de la variable aléatoire  $\bar{\Pi}(a) = a' \bar{R}$  est identique à l'estimateur empirique de la fonction de répartition du rendement  $\Pi(a)_t = a' R_t, 1 \leq t \leq n$  dans l'« ancien » cadre probabiliste. ■

En raison de cette analogie apportée par l'utilisation d'estimateurs empiriques sur un processus strictement stationnaire dans un espace probabilisé général, nous allons considérer dans tout ce chapitre et dans le suivant un cadre probabiliste à espace d'états finis comme évoqué en Remarque 1.1. Ce cadre est par ailleurs celui qu'on trouve dans Artzner et al. (1999) par exemple. Désormais, nous nous intéresserons alors à des variables aléatoires  $X$  bornées – on note  $X \in L^\infty(\Omega)$  – définies sur cet espace probabilisé.

Une variable aléatoire  $X$  est alors caractérisée par ses  $n$  valeurs possibles  $(x_1 = X(\omega_1), \dots, x_n = X(\omega_n))$ , toutes équiprobables. Sa fonction de répartition s'exprime ainsi :

$$F_X(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[x_i, +\infty[}(x).$$

**Remarque :** Parmi la littérature scientifique, la variable aléatoire représentant le risque est souvent liée à des quantités de nature variée. Il peut s'agir d'un niveau de richesse absolu sur un horizon de temps donné. C'est par exemple le cas en gestion actif-passif lorsqu'on s'intéresse au résultat futur d'une activité ou d'une filiale sur une période de temps d'un an. Il peut également s'agir d'un niveau de pertes, comme par exemple en risque de crédit, lorsqu'on calcule des fonctions d'*expected loss* ou de *loss given default* sur des produits de crédit (CDS, CDOs, *Basket Default Swaps*, etc.). Pour nous, il s'agit d'un niveau de rendement c'est-à-dire d'une quantité du type  $\frac{\Pi(t+1) - \Pi(t)}{\Pi(t)}$  où  $\Pi(t)$  désigne le niveau de richesse absolue du portefeuille à la date  $t$ . C'est un cadre qu'on trouve de manière fréquente en gestion d'actifs. ■

En résumé, dans ce chapitre et dans le suivant, la mesure du risque porte sur des rendements aléatoires à horizon déterminé. En effet, la question de l'horizon dans la mesure du risque est cruciale (faut-il mesurer une VaR à horizon 6 mois, 1 an, 2 ans ?), ainsi nous considérerons dans ces deux chapitres des rendements aléatoires portant sur le même horizon de temps.

## b. Fonction de quantile

Nous définissons ici un autre mode de caractérisation du profil probabiliste des rendements aléatoires, il s'agit de leur fonction de quantile. Si nous précisons cette notion bien connue, c'est qu'il en existe de multiples formalisations dans la littérature (cf. Denneberg (1994) par exemple et la remarque ci-après).

**Définition (Fonction de quantile).** La fonction de quantile d'une variable aléatoire  $X$  est définie de la manière suivante :

$$F_X^{-1} : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \inf \{y \mid F_X(y) \geq p\}$$

Cette fonction appartient à la classe des fonctions pseudo-inverses de la fonction de répartition  $F_X$  (cf. Denneberg (1994)). Cette fonction vérifie en particulier la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dF_X(x) = \int_0^1 F_X^{-1}(p) dp = \mathbf{E}[X].$$

**Remarque :** Les intégrales sont ici définies au sens de Stieltjes<sup>7</sup>. Par ailleurs, on rappelle que la fonction de quantile est continue à gauche et admet une limite à droite en tout point (càglàd). ■

**Remarque :** Si notre choix de la fonction de quantile parmi les pseudo-inverses de la fonction de répartition est arbitraire, il correspond néanmoins à la convention choisie par la majeure partie de la littérature scientifique traitant de théorie du risque. Nous avons choisi le quantile dit *inférieur*. Nous aurions tout aussi bien pu choisir par exemple le *quantile supérieur* défini par  $F_X^{-1}(p) = \sup \{y \mid F_X(y) \leq p\}$ . De plus amples développements sur le sujet peuvent être trouvés dans Acerbi et Tasche (2002) et Rockafellar et Uryasev (2002) par exemple. ■

Dans notre cadre, où le nombre d'états de l'espace probabilisé est fini, la fonction de quantile du rendement  $X$  prend la forme suivante, pour  $\alpha \in ]0,1[$  :

$$F_X^{-1}(\alpha) = x_{i:n} \text{ si } \alpha \in \left] \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right], \quad i = 1, \dots, n ;$$

<sup>7</sup> L'intégrale de Stieltjes  $\int_I f(x) dg(x)$  de  $f$  par rapport à une fonction monotone  $g$  sur un intervalle  $I$  est définie comme la limite de la somme  $\sum_{i=0}^{n-1} (g(d_{i+1}) - g(d_i)) f(d_i)$  lorsque le pas de la subdivision  $d_0 = \inf I \leq d_1 \leq \dots \leq d_{n-1} \leq \sup I = d_n$  tend vers 0.

où  $x_{i:n}$  est la  $i$ -ème composante du vecteur ordonné des rendements historiques de  $X$ ,  $x_{1:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ . On note également, de manière générique :

$$F_X^{-1}(\alpha) = x_{\lceil n\alpha \rceil:n},$$

où  $\lceil z \rceil$  désigne le « plafond » de  $z$ , c'est-à-dire  $z$  s'il est entier ou l'entier immédiatement supérieur dans le cas contraire. Par pure convention, on ajoute également  $F_X^{-1}(0) = -\infty$ .

## 2. Théorie de la mesure du risque – Les principales approches

Dans les années 40 apparaissait la théorie de l'utilité espérée, proposant une caractérisation des préférences des agents économiques à l'aide d'axiomes définissant leur comportement. Von Neumann et Morgenstern établissaient alors l'existence d'une fonction d'utilité caractérisant les préférences des agents, pour peu que celles-ci obéissent aux axiomes. Les préférences des agents économiques étaient alors rapportées à une quantité et une « loterie » était préférée à une autre si l'espérance d'utilité de celle-ci était plus grande.

Dans les années 80, Menahem Yaari (cf. Yaari (1987)) développe une théorie analogue, la *théorie duale du risque* (*Dual Theory of Choice Under Risk*), également sur la base d'une approche axiomatique. Les théoriciens reprendront ce type d'approche par la suite, notamment, pour la Finance, avec Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999) et pour l'Assurance, avec Panjer, Wang et Young (1997) puis Denuit, Dhaene, Goovaerts, Kaas et Vyncke (2002).

D'autres théoriciens imposent une certaine forme à des indicateurs avant de discuter de leur compatibilité avec les axiomes de la théorie du risque. Ils définissent ainsi des familles de mesures de risque (cf. Denneberg (1990), Fischer (2001), Acerbi (2002)): nous étudierons ici les mesures basées sur les moments et les mesures basées sur les quantiles de la distribution.

L'objet de cette sous-section est d'effectuer un large travail de synthèse de ces approches en théorie du risque. Nous commencerons par nous intéresser aux principaux axiomes tels qu'ils sont pratiqués dans la littérature scientifique, puis nous étudierons successivement les 2 familles de mesures que nous venons d'évoquer. En particulier, nous introduirons les mesures basées sur les quantiles en commençant par les exemples bien connus de la Value at Risk et de l'Expected Shortfall avant d'évoquer de manière plus générale les mesures spectrales de risque.

La nature du contenu de cette sous-section est relativement théorique. Ainsi nous nous attacherons à définir les mesures de risque et à leur associer un certain nombre de propriétés et de représentations relativement basiques, tout en les confrontant aux axiomes classiques de la théorie du risque.

### a. Approche axiomatique des mesures de risque

Par analogie avec la théorie de l'utilité espérée, cette approche a pour but de caractériser les mesures de risque vérifiant un certain nombre d'axiomes, représentatifs d'attitudes de gestionnaires face au risque.

Comme évoqué ci-dessus, parmi les références en la matière, on trouve les travaux de Yaari (1987), Panjer, Wang et Young (1996), Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999) et de Denuit, Dhaene, Goovaerts, Kaas et Vyncke (2002). L'approche axiomatique sert souvent de point de

départ dans la majeure partie de la littérature scientifique de théorie du risque, cependant les publications se différencient souvent par le choix initial des axiomes. Ici nous en présentons quelques uns, au regard desquels nous évaluerons les mesures de risque que nous considérerons par la suite.

(H1) *Homogénéité Positive* : pour tout rendement aléatoire  $X$  et pour tout réel  $\lambda > 0$ ,  
 $\rho(\lambda X) = \lambda \cdot \rho(X)$ .

Cette propriété selon laquelle le risque sur une multiplication de la position sur le rendement  $X$  est grossi du même facteur peut toutefois se discuter quand on en vient à des leviers extrêmes. Cette précaution, de nouveau d'actualité car liée à un souci d'appréhension du risque de liquidité, est par exemple prise dans Föllmer et Schied (2002)<sup>8</sup> et dans la littérature sur les mesures de risque convexes en général. En effet, on peut tout à fait imaginer que multiplier le risque par le facteur de dilatation devienne insuffisant lorsque la taille de la position devient importante.

**Remarque :** Une mesure de risque convexe est une mesure vérifiant la propriété suivante :

(H1') *Convexité* : pour tous rendements aléatoires  $X$  et  $Y$  et pour tout réel  $\lambda \in [0;1]$ ,  
 $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$ .

■

Ici, les mesures de risque que nous étudierons vérifieront en général l'axiome d'homogénéité positive. La convexité découle alors des axiomes d'homogénéité positive et de sous-additivité (cf. plus loin, axiome (H4)).

L'axiome suivant permet de fixer les conventions sur la mesure du risque porté par des actifs de rendement déterministe :

(H2) *Invariance par Translation* : pour tout rendement aléatoire  $X$  et pour tout réel  $\alpha$ ,  
 $\rho(X + \alpha) = \rho(X) - \alpha$  ;

Pour toute mesure de risque  $\rho$  vérifiant (H1), on a  $\rho(0) = 0$ . Si, par ailleurs,  $\rho$  vérifie (H2), alors pour tout rendement sans risque (i.e. déterministe)  $r$ ,  $\rho(r) = -r$ . Ces deux axiomes posent la convention selon laquelle un rendement dit « sans risque » n'est pas de risque nul.

**Remarque :** A ce sujet, De Giorgi (2005) propose de décomposer une mesure de risque, au sens où nous l'entendons, en une combinaison linéaire d'une mesure de rendement  $\lambda$  et d'une mesure de risque « pur »  $\mu$ . Plus précisément, De Giorgi introduit la notion *mesures de rendement-risque* sous la forme  $\mu(X) - \alpha\lambda(X)$  avec  $\alpha \geq 0$ , en modifiant légèrement l'axiomatique. Par exemple, l'axiome d'invariance par translation (H2) adapté aux mesures de risque « pur » et aux mesures de rendement devient :

---

<sup>8</sup> En effet, les travaux de Föllmer et Schied (2002) donnent une caractérisation des mesures de risque en excluant purement et simplement l'axiome d'homogénéité positive.

(H2') *Invariance par Translation* : Pour tout rendement aléatoire  $X$  et pour tout réel  $\alpha$ ,  $\lambda(X+r) = \lambda(X)+r$  et  $\mu(X+r) = \mu(X)$ .

On retrouve ce type d'approche chez Rockafellar, Uryasev et Zabarankin (2006), dans le cas des mesures de déviation. ■

Nous ajoutons les axiomes suivants :

(H3) *Monotonie* : pour tous rendements aléatoires  $X$  et  $Y$  vérifiant  $X \geq Y$  (presque sûrement),  $\rho(X) \leq \rho(Y)$ ;

(H4) *Sous-additivité* : pour tous rendements aléatoires  $X$  et  $Y$ ,  $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$ .

De l'axiome de monotonie (H3) on déduit directement la propriété suivante.

**Propriété (Mesure monotone et pire revenu).** Si la mesure de risque  $\rho$  vérifie l'axiome de monotonie (H3), alors pour tout rendement aléatoire  $X$ , on a :

$$\rho(X) \leq -\text{ess. inf}(X).$$

L'axiome de sous-additivité correspond à l'idée selon laquelle la diversification diminue le risque. Par exemple, dans un cadre moyenne-variance, cette propriété tend à pousser les gestionnaires à profiter des effets de corrélation négative entre les rendements aléatoires afin de diminuer la variance par agrégation. C'est un résultat bien connu en gestion d'actifs et qui se trouve dans les travaux de Markovitz (1952) par exemple.

Dans Artzner et al. (1999), une mesure de risque vérifiant les quatre axiomes (H1)-(H4) est appelée mesure de risque *cohérente*. De plus, il est établi la caractérisation mathématique suivante :

**Théorème (Représentation des mesures cohérentes de risque par scénarios généralisés – Artzner et al. (1999)<sup>9</sup>).** Pour toute mesure de risque cohérente  $\rho$ , il existe un ensemble  $\Pi$  de mesures de probabilités définies sur  $(\Omega, \mathbf{A}, \mathbf{P})$  tel que pour tout rendement aléatoire  $X$  on a :

$$\rho(X) = \sup \{ -\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X], \mathbf{Q} \in \Pi \}.$$

A ces quatre axiomes on peut ajouter :

(H5) *Invariance en loi* :  $\rho(X)$  ne dépend que de la loi de probabilité de  $X$ , à travers sa fonction de répartition  $F_X$  ou, de manière équivalente, sa fonction de quantile  $F_X^{-1}$ ;

<sup>9</sup> L'article établit ce résultat dans le cas où l'espace des possibles  $\Omega$  est fini, ce qui correspond à notre cadre d'étude comme nous le précisons plus haut. Cependant, il existe une caractérisation mathématique dans le cas d'espaces probabilisés généraux : elle est présentée dans Delbaen (2000) mais nous ne l'énoncerons pas.

Cet axiome porte en lui l'idée selon laquelle le risque, donc a fortiori sa mesure, est entièrement caractérisé par une distribution de probabilité. En fait, cette propriété permet d'aboutir à la proposition suivante, que nous démontrons en Annexe A :

**Propriété (Mesures de risque cohérentes, invariantes en loi et Espérance)** Etant donné une mesure de risque  $\rho$  cohérente (H1) – (H4) et invariante en loi (H5), on a :

$$\rho(X) \geq -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = -\mathbf{E}[X].$$

*Preuve.* Cf. Annexes. ■

**Remarque :** La plupart des mesures de risques utilisées dans la pratique vérifient l'axiome d'invariance en loi. Toutefois, à titre de contre-exemple, citons le cas de la *Worst Conditional Expectation* définie dans Acerbi et Tasche (2002) et Artzner et al. (1999) par

$$WCE_\alpha = -\inf \left\{ \mathbf{E}[X|A], A \in \mathbf{A}, \mathbf{P}(A) \geq \alpha \right\},$$

où on rappelle que  $\mathbf{P}$  désigne la mesure de l'espace probabilisé. Ainsi, il est démontré que la WCE n'est pas invariante en loi. ■

L'axiome suivant est largement présenté dans de nombreux travaux de théorie du risque<sup>10</sup> :

(H6) *Comonotonie Additive*: pour tous rendements aléatoires  $X$  et  $Y$  comotonones, on a  $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$ .

La comonotonie est un concept lié à la dépendance parfaite. Pour rappel, deux rendements aléatoires  $X$  et  $Y$  sont dits *comotonones* s'ils vérifient :

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2, (X(\omega_2) - X(\omega_1))(Y(\omega_2) - Y(\omega_1)) \geq 0.$$

La comonotonie est en quelque sorte une généralisation de la corrélation parfaite. Cette interprétation provient de la caractérisation suivante<sup>11</sup> : un vecteur  $(X_1, \dots, X_d)$  de variables aléatoires est comotonone si et seulement s'il existe une variable aléatoire uniforme  $U$  telle que les vecteurs  $(X_1, \dots, X_d)$  et  $(F_{X_1}^{-1}(U), \dots, F_{X_d}^{-1}(U))$  soient de même loi.

Finalement, l'axiome de comonotonie additive suppose l'additivité du risque dans le cas de variables comotonones. Cet axiome correspond à l'intuition selon laquelle si deux rendements suivent exactement les mêmes variations entre deux états de la nature, alors aucun effet de compensation de l'un par l'autre n'intervient lorsqu'on somme ces deux rendements. En d'autres termes, deux rendements comotonones ne peuvent constituer une couverture l'un pour l'autre, par conséquent leurs risques s'additionnent.

Nous introduirons par la suite plusieurs exemples de mesures comotonones additives. En fait, nous verrons plus loin que cet axiome intervient dans la caractérisation des mesures spectrales

<sup>10</sup> Voir par exemple Denuit et al. (2002), Dhaene, Goovaerts, Kaas, Tan, Vanduffel et Vyncke (2004), Denuit, Dhaene et Goovaerts (2006) ou Heyde, Kou et Peng (2006).

<sup>11</sup> Voir par exemple Denuit et al. (2002) ou Dhaene et al. (2004).

de risque comme les seules mesures qui soient cohérentes, invariantes en loi et comonotones additives. Nous devons ce résultat à Kusuoka (2001).

En définitive, dans les Chapitres 6 et 7, nous serons amenés à considérer des mesures de risque qui sont toutes positivement homogènes (H1), invariantes par translation (H2) et invariantes en loi (H5).

### b. Mesures de risque basées sur les moments

On regroupe sous cette appellation les mesures qui quantifient le risque à l'aide des moments de la distribution du rendement aléatoire. Historiquement, les mesures construites à partir de la variance, ou du moment d'ordre 2, sont les premières mesures de risque de cette catégorie ; elles ont notamment été utilisées en théorie de la gestion d'actifs dans les années cinquante. Dans les travaux de Markovitz (1952), l'écart-type est utilisé comme une mesure de risque, nous rappelons ici sa définition dans cette utilisation :

$$\sigma(X) = \left( \mathbf{E} \left[ (X - \mathbf{E}[X])^2 \right] \right)^{1/2} = \left( \int_{\mathbf{R}} (x - \mathbf{E}[X])^2 dF_X(x) \right)^{1/2}.$$

Dans notre cadre et avec nos notations, l'écart-type se traduit par  $\sigma(X) = \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 \right)^{1/2}$

où  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$  est l'espérance de la variable aléatoire  $X$ .

D'un point de vue axiomatique, l'écart-type est invariant en loi (H5), positivement homogène (H1) et sous-additif (H4), mais ne vérifie pas les propriétés de monotonie (H3), de comonotonie additive (H6) ou d'invariance par translation (H2). En ce qui concerne ce dernier axiome, on peut remplacer la définition ci-dessus par la mesure  $\rho(X) = -\mathbf{E}[X] + \alpha \cdot \sigma(X)$  qui, comme désiré, vérifie bien la propriété (H2), mais toujours pas (H3), ni (H6). On remarque en particulier que l'écart-type peut dépasser la pire perte possible, ce qui constitue une violation claire de l'axiome de monotonie.

De plus, sa définition mathématique nous montre qu'il quantifie les déviations vers les rendements favorables et défavorables de la même façon : l'écart-type retourne ainsi la même quantité pour deux rendements de moyenne nulle et opposés l'un de l'autre.

C'est pour corriger ce défaut de symétrie qu'on a proposé la semi-variance, définie de la manière suivante<sup>12</sup> :

**Définition (Semi-variance).** Pour tout rendement aléatoire  $X$  on définit la *semi-variance inférieure* (ou *semi-variance, lower semi-variance*) par

$$\sigma^-(X) = -\mathbf{E}[X] + a \cdot \left( \mathbf{E} \left[ (X - \mathbf{E}(X))_-^2 \right] \right)^{1/2} = -\bar{x} + a \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})_-^2 \right)^{1/2},$$

où  $z_- = \max(-z, 0)$ .

<sup>12</sup> Voir par exemple Denneberg (1990) et Fischer (2001).

**Remarque :** De la même manière que pour l'écart-type, la semi-variance est souvent définie sans le terme « correctif » d'espérance dans la littérature scientifique sur les mesures de risque. ■

De manière plus générale, Fischer (2001) définit la classe de mesures suivante :

**Définition (Mesures de Fischer).** Pour tout rendement aléatoire  $X$  on définit la mesure de Fischer :

$$\rho_{q,a}(X) = -\mathbf{E}[X] + a \cdot \left( \mathbf{E} \left[ \left( X - \mathbf{E}[X] \right)_-^q \right] \right)^{1/q} = -\bar{x} + a \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( x_k - \bar{x} \right)_-^q \right)^{1/q},$$

avec  $0 \leq a \leq 1$  et  $q \geq 1$ .

Par exemple, la semi-variance est la mesure de Fischer correspondant à un exposant  $q = 2$ .

Les mesures de risque de Fischer, tout comme l'écart-type, vérifient les axiomes d'homogénéité positive (H1), d'invariance par translation (H2), de sous-additivité (H4) et d'invariance en loi (H5). Elles vérifient en plus l'axiome de monotonie (H3) mais pas la comonotonie additive (H6).

Cela en fait des mesures de risque cohérentes au sens d'Artzner et al. (1999) ; elles admettent donc une représentation par scénarios généralisés.

D'après leur définition mathématique ci-dessus, on établit immédiatement que pour toutes valeurs des paramètres  $0 \leq a \leq 1$  et  $q \geq 1$ , on a  $\rho_{q,a}(X) \geq -\mathbf{E}[X]$  comme permet d'affirmer par ailleurs la propriété sur les mesures cohérentes, invariante en loi et l'espérance énoncée précédemment.

### c. Value-at-Risk et Expected Shortfall

Nous entrons à présent dans une autre famille de mesures de risque qui sont les mesures définies à partir de la fonction de quantile de la distribution du rendement.

L'exemple le plus célèbre de cette classe de mesures et le plus impliqué dans les processus de gestion des risques des établissements bancaires est la *Value-at-Risk*, notée VaR. En effet, cette mesure intervient au niveau des indicateurs de risque de marché (Bâle I) et de calcul du capital économique (Bâle II). Elle est définie de la manière suivante :

**Définition (Value-at-Risk).** Pour tout rendement aléatoire  $X$ , on définit la *Value-at-Risk* au niveau de probabilité  $0 < \alpha < 1$ , notée  $VaR_\alpha(X)$ , par :

$$VaR_\alpha(X) = -F_X^{-1}(\alpha) = -x_{\lceil n\alpha \rceil, n},$$

où  $F_X^{-1}$  désigne la fonction de quantile de  $X$ .

La Value-at-Risk se caractérise par un seul paramètre, le seuil de probabilité  $\alpha$ . Cela en fait un élément de base de la classe des mesures définies par des quantiles.

On établit sans difficulté que la VaR vérifie les axiomes d'homogénéité positive (H1), d'invariance par translation (H2), de monotonie (H3) et d'invariance en loi (H5). On établit également qu'elle vérifie l'axiome de comonotonie additive (H6) ; ceci est par exemple démontré dans Denuit et al. (2002).

Toutefois, la VaR ne vérifie pas l'axiome de sous-additivité et il est facile de construire des contre-exemples basés sur des distributions discrètes simples (cf. Artzner et al. (1999) par exemple). De plus, certes, la VaR rend compte d'un quantile de la distribution du rendement, cependant elle ne donne aucune information sur le profil probabiliste des pertes au-delà de ce niveau.

Pour mieux rendre compte de cela, on définit l'*Expected Shortfall* (ES) de la manière suivante :

**Définition (Expected Shortfall).** Pour tout rendement aléatoire  $X$ , on définit l'*Expected Shortfall* au niveau de probabilité  $0 < \alpha < 1$ , notée  $ES_\alpha(X)$ , par :

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \left( \mathbf{E} \left[ X \mathbf{1}_{\{X \leq F_X^{-1}(\alpha)\}} \right] + F_X^{-1}(\alpha) (\alpha - \mathbf{P}(X \leq F_X^{-1}(\alpha))) \right) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_X^{-1}(u) du.$$

Il existe des variantes de l'*Expected Shortfall* (*Worst Conditional Expectation* (cf. plus haut), *Tail Conditional Expectation*, *Tail-VaR*, etc.) dont les définitions sont différentes d'une publication à l'autre. Dans les travaux d'Acerbi et Tasche (2002) on trouve des définitions pour chacune de ces notions ainsi qu'une revue mathématique exhaustive des liens et nuances existant entre ces mesures (relations d'ordre, cas d'égalité, etc.). C'est ainsi qu'on établit l'égalité qui figure dans la définition ci-dessus<sup>13</sup>.

Dans notre cadre probabiliste à espace d'états fini, la représentation de l'*Expected Shortfall* prend la forme suivante :

**Propriété (Représentation de l'ES en espace d'états fini avec mesure de probabilité uniforme).**

$$ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_X^{-1}(p) dp = -\frac{1}{n\alpha} \left[ \sum_{i=1}^{\lceil n\alpha \rceil} x_{i:n} + (\lceil n\alpha \rceil - n\alpha) x_{\lceil n\alpha \rceil:n} \right].$$

C'est cette représentation qui est d'ailleurs adoptée en optimisation de portefeuille sous contrainte d'ES dans Rockafellar & Uryasev (2002). C'est également l'expression retenue le plus souvent pour estimer l'ES sur une série de rendements, par exemple dans Heyde, Kou et Peng (2006). Nous aurons l'occasion de revenir un peu plus loin dans cette partie sur la question de l'estimation des mesures de risque.

Notons également cette caractérisation extrême de l'*Expected Shortfall*<sup>14</sup> :

**Propriété (Caractérisation extrême de l'ES).** Pour tout rendement aléatoire borné  $X$ , on a l'égalité suivante :

<sup>13</sup> Ce résultat fait l'objet de la Proposition 3.2 d'Acerbi et Tasche (2002).

<sup>14</sup> Cette caractérisation est établie par le Corollaire 4.3 d'Acerbi et Tasche (2002).

$$ES_\alpha(X) = \inf_{s \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{\alpha} \mathbf{E}^P [(s - X)_+] - s \right\}.$$

De plus, la borne inférieure est atteinte en  $s = F_X^{-1}(\alpha)$ .

**Remarque :** Ce résultat est particulièrement utile en optimisation de portefeuille, comme nous aurons l'occasion de le voir. Elle trouve également son utilité lorsqu'il s'agit de comparer le comportement de l'Expected Shortfall vis-à-vis du *stop-loss order* (cf. Denuit, Dhaene et Goovaerts (2006)) et de la dominance stochastique du second-ordre. ■

## d. Mesures spectrales de risque

### (i) Définitions et propriétés

Après la Value-at-Risk et l'Expected Shortfall, on définit plus généralement les mesures spectrales de risque de la manière suivante :

**Définition (Mesures spectrales de risque).** Soit  $\phi : ]0;1[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positive, décroissante et d'intégrale égale à 1. Pour tout rendement aléatoire  $X$ , on définit la mesure spectrale associée à  $\phi$  par

$$M_\phi(X) = - \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp.$$

$\phi$  est alors appelé le *spectre* associé à la mesure  $M_\phi$ .

Les mesures spectrales de risque sont définies sous cette forme dans Acerbi (2002). Il y est en particulier exposé la nécessité des hypothèses faites sur le comportement du spectre. Plus précisément, considérons l'ensemble des fonctions  $\phi : ]0;1[ \rightarrow \mathbb{R}$  et l'ensemble des mesures de risque associées, définies sur  $L^\infty(\Omega)$ , par  $M_\phi : X \in L^\infty(\Omega) \mapsto - \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp$ . Acerbi démontre alors le théorème suivant :

**Théorème (Caractérisation des mesures spectrales – C. Acerbi (2002)).** Une mesure  $M_\phi$  associée à une fonction  $\phi : ]0;1[ \rightarrow \mathbb{R}$  est cohérente – c'est-à-dire vérifie les axiomes (H1) à (H4) – si et seulement si  $\phi$  est positive, décroissante<sup>15</sup> et d'intégrale égale à 1.

<sup>15</sup> Dans Acerbi (2002) la positivité de  $\phi$  est définie par  $\forall (a,b) \in ]0;1[^2, \int_a^b \phi \geq 0$ . De même, la décroissance de

$$\phi \text{ est définie par } \forall a \in ]0;1[, \forall \varepsilon > 0, \begin{cases} a - \varepsilon \geq 0 \\ a + \varepsilon \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \int_{a-\varepsilon}^a \phi \geq \int_a^{a+\varepsilon} \phi.$$

Dans notre cadre probabiliste à espace d'états fini, on rappelle que le quantile de niveau  $\alpha$  du rendement  $X$  vaut  $F_X^{-1}(\alpha) = x_{i:n}$  si  $\alpha \in \left] \frac{i-1}{n}, \frac{i}{n} \right]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , où  $x_{i:n}$  est la  $i$ -ème composante du vecteur ordonné des rendements historiques de  $X$ ,  $x_{1:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ .

L'intégrale intervenant dans la définition des mesures spectrales de risque prend alors la forme suivante :

**Propriété (Représentation des mesures spectrales en espace d'états fini, sous mesure de probabilité uniforme).**

$$M_\phi(X) = -\int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp = -\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{i:n},$$

où  $\lambda_i = \int_{(i-1)/n}^{i/n} \phi(p) dp$ .

En transposant les propriétés du spectre  $\phi$  dans notre cadre, on observe :

- $1 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  ;
- $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

**Remarque :** Si on définit la mesure  $\mathbf{P}_X$ , relativement au rendement  $X$ , par  $\forall 1 \leq i \leq n, \mathbf{P}_X(\omega_{i:n}) = \lambda_i$  où  $\omega_{i:n}$  est l'événement dans lequel le rendement  $X$  vaut  $x_{i:n}$ , alors on remarque que :

- $\mathbf{P}_X$  est une mesure de probabilité définie sur  $(\Omega, \mathbf{A}, \mathbf{P})$  ;
- d'autre part,  $M_\phi(X) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i x_{i:n} = -\mathbf{E}^{\mathbf{P}_X}[X]$  ;

où  $\mathbf{E}^{\mathbf{P}_X}[\cdot]$  désigne l'espérance prise sous la mesure de probabilité  $\mathbf{P}_X$ . On peut établir un lien direct entre cette remarque et la représentation des mesures spectrales de risque par scénarios généralisés (cf. plus loin). ■

Enfin, il nous reste à évoquer une caractérisation axiomatique des mesures spectrales, due à Kusuoka (2001) :

**Théorème. (Caractérisation axiomatique des mesures spectrales – S. Kusuoka (2001)).** Toute mesure cohérente, invariante en loi et comonotone additive (c'est-à-dire vérifiant les axiomes (H1) à (H6)) peut se représenter sous la forme d'une mesure spectrale de risque.

**(ii) Quelques exemples de mesures spectrales de risque**

Donnons à présent quelques illustrations classiques liées aux mesures spectrales de risque.

**La VaR est-elle une mesure spectrale ?** A priori, non, car la VaR n'est pas sous-additive. Toutefois la VaR de niveau  $\alpha$  peut se représenter sous la forme d'une mesure  $M_\phi$  avec  $\phi$  définie par<sup>16</sup>  $\phi(p) = \delta_\alpha(p)$ .

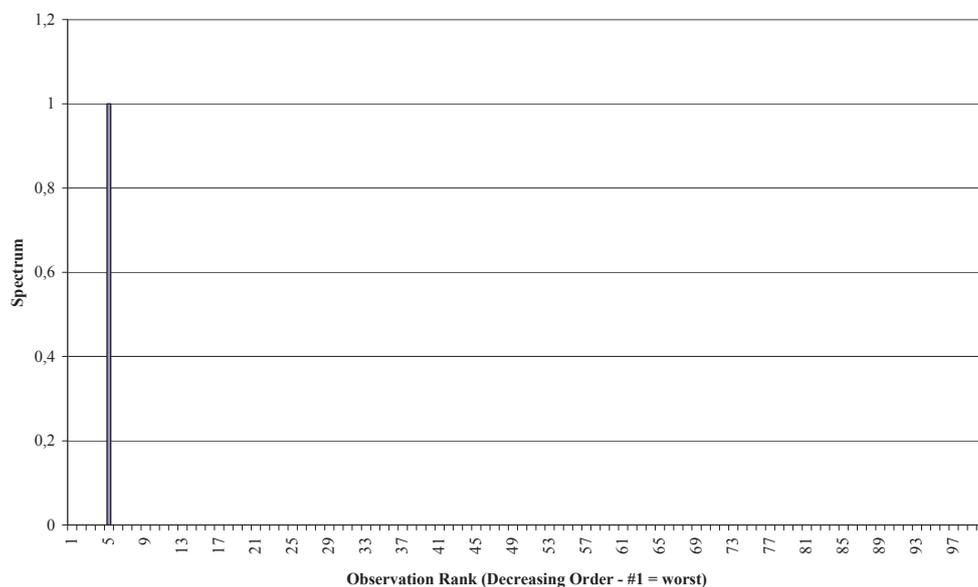
En effet, on a :

$$VaR_\alpha(X) = -F_X^{-1}(\alpha) = -\int_0^1 \delta_\alpha(p) F_X^{-1}(p) dp.$$

Ici on remarque que le « spectre » associé à la VaR présente toutes les propriétés requises pour une mesure spectrale, sauf la décroissance, qui conditionne en fait la sous-additivité de la mesure associée, d'après Acerbi (2002).

Par ailleurs, cette représentation nous inspire un autre mode de représentation des mesures spectrales, comme moyenne pondérée de VaR :

$$M_\phi(X) = +\int_0^1 \phi(p) VaR_p(X) dp.$$



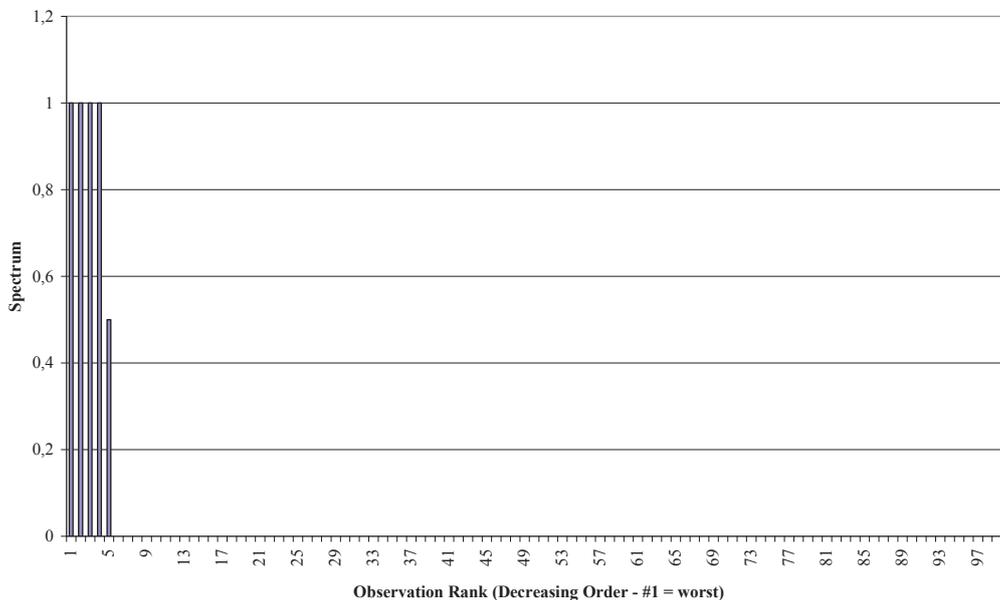
**Figure 6.1. Représentation d'un « spectre » de la VaR.** En abscisse, le classement de l'observation parmi les rendements ordonnés (n°1 = pire rendement, n°100 = meilleur rendement). En ordonnée, l'intensité du spectre à appliquer à chacun d'entre eux. Le nombre d'observations est de 100. Ici le niveau de quantile choisi pour la VaR est de 4.5%.

**Une représentation spectrale de l'Expected Shortfall.** L'Expected Shortfall de niveau  $\alpha$  est une mesure spectrale ; elle est associée au spectre  $\phi_\alpha$  défini par  $\phi_\alpha(p) = \mathbf{1}_{]0;\alpha]}(p)$ . Contrairement à la VaR, on vérifie immédiatement que  $\phi_\alpha$  satisfait aux propriétés de positivité, de décroissance et d'intégrale égale à 1 requises pour définir une mesure spectrale.

---

<sup>16</sup>  $\delta_\alpha$  désigne le Dirac en  $\alpha$ , c'est-à-dire la distribution définie par  $\int_0^1 \delta_\alpha(p) f(p) dp = f(\alpha)$  pour toute fonction  $f \in C^\infty$  à support compact inclus dans  $]0;1[$ .

De plus, lorsqu'on fait tendre  $\alpha$  vers 1, on tombe sur la mesure correspondant au spectre défini par  $\phi(p)=1$  pour tout  $p \in ]0;1[$ , c'est-à-dire l'espérance, la mesure de risque cohérente et invariante en loi la « moins pessimiste »<sup>17</sup>. Plus généralement, pour tout rendement aléatoire  $X$ , la fonction  $\alpha \mapsto ES_\alpha(X)$  est une fonction décroissante.



**Figure 6.2. Représentation du spectre de l'ES.** En abscisse, le classement de l'observation parmi les rendements ordonnés (n°1 = pire rendement, n°100 = meilleur rendement). En ordonnée, l'intensité du spectre à appliquer à chacun d'entre eux. Le nombre d'observations est de 100. Ici, on remarque que le nombre total d'observations est tel que 4.5% tombe entre deux valeurs consécutives ( $i/n$ ) et  $(i+1/n)$ . L'estimation de l'ES implique alors de tronquer l'observation d'indice  $(i+1/n)$ .

On peut même établir un mode de représentation des mesures spectrales en général à partir d'Expected Shortfalls de différents niveaux. Nous rappelons ce résultat ici :

**Propriété. (Représentation d'une mesure spectrale comme somme pondérée d'Expected Shortfalls – Acerbi (2004)<sup>18</sup>).** Pour toute mesure spectrale  $M_\phi$  il existe une mesure de probabilité  $\nu_\phi$  définie sur  $[0;1]$  telle que

$$M_\phi(X) = \int_0^1 ES_\alpha(X) d\nu(\alpha).$$

**Mesures de Déviation par rapport à la médiane.** Nous évoquons ici un autre exemple de mesure spectrale trouvé dans la littérature scientifique.

Denneberg (1990) définit une classe de mesures de déviation par rapport à la médiane<sup>19</sup>, de la manière suivante :

$$\rho_a(X) = -E[X] + a \times E\left[\left|X - F_X^{-1}(1/2)\right|\right] = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(x_{i:n} + a \times \left|x_{i:n} - x_{\lceil n/2 \rceil:n}\right|\right),$$

<sup>17</sup> En cela, nous faisons référence à la propriété énoncée plus tôt, affirmant que tout mesure cohérente invariante en loi domine l'espérance mathématique.

<sup>18</sup> Plus précisément, ce résultat est énoncé dans la Proposition 3.4 d'Acerbi (2004).

<sup>19</sup> La médiane associée au rendement  $X$  est son quantile de niveau 1/2.

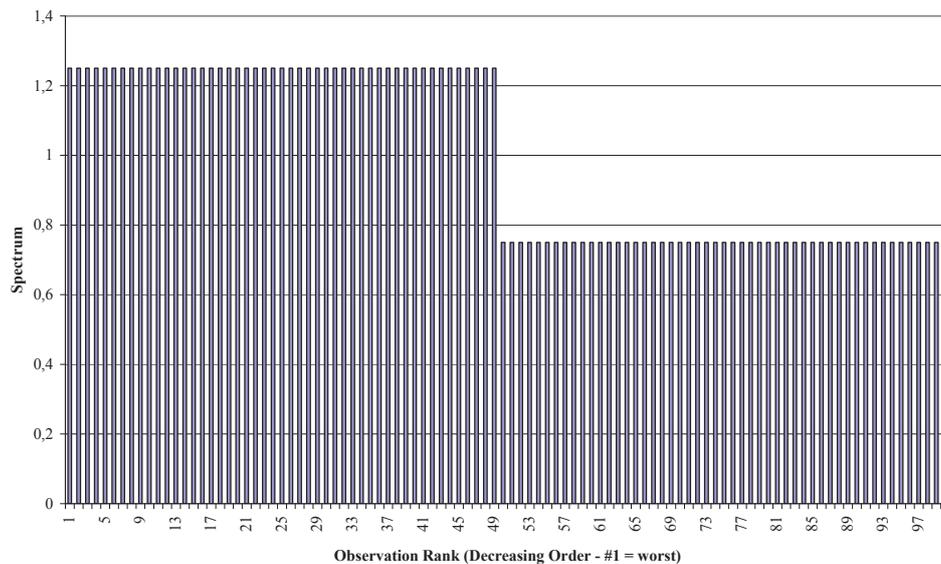
avec  $0 \leq a \leq 1$ .

Ces mesures sont cohérentes et invariantes en loi (axiomes (H1) à (H5)). De plus, Denneberg démontre que l'utilisation de la médiane comme point de référence dans le terme de déviation plutôt que l'espérance (cas des mesures de Fischer pour  $q = 1$ ) rend ces mesures comonotones additives (axiome (H6)).

On en déduit que les mesures de déviation par rapport à la médiane sont des mesures spectrales, Denneberg (1990) propose d'ailleurs la représentation suivante :

$$\rho_a(X) = - \int_0^1 \phi(p) F_X^{-1}(p) dp,$$

où  $\phi(p) = (1+a)1_{[0,1/2[}(p) + (1-a)1_{[1/2,1]}(p)$ .



**Figure 6.3. Représentation du spectre de la mesure de déviation par rapport à la médiane.** En abscisse, le classement de l'observation parmi les rendements ordonnés (n°1 = pire rendement, n°100 = meilleur rendement). En ordonnée, l'intensité du spectre à appliquer à chacun d'entre eux. Le nombre d'observations est de 100. Ici,  $a=0.25$ .

### 3. Propriétés et représentation des mesures de risque

L'objet de cette sous-section est d'énoncer un certain nombre de propriétés vérifiées par les mesures de risque que nous venons de présenter de manière détaillée. Son contenu est à nouveau relativement théorique, mais les résultats que nous y énonçons permettent de confronter les mesures introduites à des notions familières en théorie générale du risque.

Dans un premier temps, nous étudions ici la compatibilité des mesures avec certains ordres stochastiques. Ce point est en fait déjà à l'étude dans certains travaux d'assurance (cf. Denuit, Dhaene, Goovaerts (2006) par exemple). Nous proposons ici d'établir ces résultats pour les mesures spectrales de risque.

Puis, nous nous intéressons à l'approche duale et aux mesures de distorsion développée par Yaari et montrons le lien existant avec les mesures spectrales de risque introduites par Acerbi (2002). En effet, l'approche développée par Yaari propose d'établir un pendant à la théorie de l'utilité espérée à l'aide de fonctions de distorsion, c'est-à-dire en proposant d'identifier la mesure du risque à une intégrale de Choquet suivant une distorsion de la mesure de

probabilité des rendements possibles, là où la théorie de l'utilité espérée propose d'évaluer l'espérance d'une « distorsion » des rendements possibles par rapport à la mesure de probabilité d'origine. Nous proposons donc ici d'établir un lien entre la représentation de l'aversion au risque par une fonction de distorsion et par un spectre, tel que nous l'avons défini plus haut.

Enfin, dans la représentation des mesures de risque par scénarios généralisés intervenant dans Artzner et al. (1999), c'est l'ensemble des scénarios généralisés ( $\Pi$ , selon les notations utilisées précédemment) qui caractérise la mesure de risque. Les travaux de Heyde, Kou et Peng (2006) proposent déjà quelques propriétés sur cet ensemble, selon les axiomes vérifiés par la mesure. Nous proposons ici une description explicite de  $\Pi$  dans le cas de l'Expected Shortfall et plus généralement, dans le cas des mesures spectrales de risque.

### a. Ordres stochastiques et mesures de risque

L'approche axiomatique développée en Section 2 de ce chapitre évoque l'analogie entre mesures de risque et théorie de l'utilité espérée. Dans cette théorie, ainsi que dans de nombreux travaux d'assurance, on étudie souvent la compatibilité avec les ordres stochastiques. Nous rappelons leur définition ci-dessous.

**Définition. (Dominance Stochastique du 1<sup>er</sup> Ordre – FOSD).** Soient  $X$  et  $Y$  deux rendements de portefeuille. On dit que  $X$  domine  $Y$  au sens de la dominance stochastique du 1<sup>er</sup> ordre, domination notée par  $X \succ_{FOSD} Y$ , si une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) pour toute fonction croissante  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a  $\mathbf{E}[u(X)] \geq \mathbf{E}[u(Y)]$  ;
- (ii) pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $F_X(t) \leq F_Y(t)$  ;

**Définition. (Dominance Stochastique du 2<sup>nd</sup> Ordre – SOSD).** Soient  $X$  et  $Y$  deux rendements de portefeuille. On dit que  $X$  domine  $Y$  au sens de la dominance stochastique du 2<sup>nd</sup> ordre, domination notée par  $X \succ_{SOSD} Y$ , si une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- (i) pour toute fonction croissante concave  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on a  $\mathbf{E}[u(X)] \geq \mathbf{E}[u(Y)]$  ;
- (ii) pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on a  $\int_{-\infty}^t F_X(u) du \leq \int_{-\infty}^t F_Y(u) du$ .

En particulier, dans la théorie de von Neumann – Morgenstern, la SOSD est une des hypothèses qui permet de parvenir à la caractérisation classique des préférences des agents par une fonction d'utilité croissante et concave.

Dans Denuit et al. (2002) et Dhaene et al. (2004), on introduit en plus l'ordre *stop-loss* et l'ordre convexe, dont nous rappelons la définition ci-après.

**Définition. (Ordre Stop-Loss et Ordre Convexe).** Soient  $X$  et  $Y$  deux rendements de portefeuille.

On dit que  $X$  domine  $Y$  au sens de l'ordre *stop-loss*, domination notée par  $X \succ_{SL} Y$ , si pour tout  $d \in \mathbb{R}$ , on a  $\mathbf{E}[(d - X)_+] \leq \mathbf{E}[(d - Y)_+]$ .

On dit que  $X$  domine  $Y$  au sens de l'ordre *convexe*, domination notée par  $X \succ_{Cvx} Y$ , si  $X \succ_{SL} Y$  et  $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y]$ .

Les mesures de risque cohérentes et plus généralement toutes les mesures vérifiant l'axiome de monotonie (H3) sont toutes compatibles avec le premier ordre stochastique (FOSD). Citons par exemple la VaR, l'Expected Shortfall et par extension toutes les mesures spectrales de risque, ainsi que la semi-variance et les mesures de Fischer. L'écart-type en revanche n'est pas compatible avec la FOSD !

Le résultat que nous présentons ici a trait à la compatibilité de l'Expected Shortfall et des mesures spectrales de risque avec la SOSD.

**Proposition. (Compatibilité de l'Expected Shortfall et des mesures spectrales de risque avec la SOSD).** Etant donné deux rentabilités de portefeuille  $X$  et  $Y$ , on a :

$$X \succ_{SOSD} Y \Leftrightarrow \forall \alpha \in ]0;1[, ES_\alpha(X) \leq ES_\alpha(Y)$$

On a également un résultat similaire avec les mesures spectrales :

$$X \succ_{SOSD} Y \Leftrightarrow \text{Pour tout spectre } \phi, M_\phi(X) \leq M_\phi(Y).$$

**Preuve.** Cf. Annexes. ■

Ce résultat montre le fait essentiel que l'ensemble des agents dits « de von Neumann – Morgenstern » et l'ensemble des agents dont les préférences correspondent à toutes les mesures spectrales à la fois, sont identiques. Ainsi, l'étude ultérieure que nous menons concernant l'optimisation de portefeuille sous contrainte de mesures spectrales fait intervenir des gestionnaires averses au risque (type vNM), contrairement au cadre de Markovitz (1952) par exemple.

### b. Théorie duale de Yaari (1987) et mesures de distorsion

La théorie de Yaari (1987) présente une *approche duale* de la mesure du risque par rapport à la théorie de l'utilité espérée de von Neumann – Morgenstern. Partant d'une approche axiomatique des mesures de risque, là où la théorie de l'utilité espérée développe une quantification du risque basée sur la moyenne d'une transformation des niveaux de rendement, la théorie de Yaari s'intéresse à une intégrale de Choquet des niveaux de rendements par rapport à une distorsion de la mesure de probabilité. Ainsi, cette façon de quantifier le risque est appelée *mesure de distorsion*.

La mathématique sous-jacente repose donc ici sur l'*intégrale de Choquet* (cf. par exemple Denneberg (1994)). Ici nous retiendrons la définition suivante d'une mesure de distorsion :

**Définition. (Mesure de distorsion).** Soit  $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante, concave, vérifiant  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ . Pour tout rendement de portefeuille  $X$ , on définit alors la *mesure de distorsion*  $\rho_f(X)$  par

$$\rho_f(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} x d(f \circ F_X)(x) := - \int_{-\infty}^0 [1 - f(1 - F_X(x))] dx + \int_0^{+\infty} f(1 - F_X(x)) dx .$$

$f$  est appelée la *fonction de distorsion* associée à la mesure  $\rho_f$ .

Les conditions de croissance, de concavité et de valeurs aux bornes de la fonction de distorsion font de la mesure associée une mesure cohérente, invariante en loi et comonotone additive. En somme, les mesures de distorsion sont toutes des mesures spectrales de risque d'après le théorème de caractérisation de Kusuoka (2001). En fait, il est démontré dans Jones et Zitikis (2003) et dans Dhaene et al. (2004) que toute mesure spectrale peut être mise sous la forme d'une mesure de distorsion. On y trouve même une relation de correspondance entre le spectre et la mesure de distorsion relatifs :

**Proposition. (Correspondance entre mesures spectrales de risque et mesures de distorsion).** Toute mesure spectrale de risque  $M_\phi$  peut se représenter sous la forme d'une mesure de distorsion  $\rho_f$  et réciproquement. De plus, le spectre  $\phi$  et la fonction de distorsion

$f$  sont liés par la relation  $\forall p \in [0;1], f(p) = \int_0^p \phi(p) dp$ .

En particulier, pour un spectre donné  $\phi$  vérifiant les propriétés nécessaires de décroissance et de positivité énoncées par Acerbi (2002), on remarque que la fonction  $f : p \mapsto \int_0^p \phi(p) dp$  définie sur  $[0;1]$  est bien croissante (du fait de la positivité de  $\phi$ ), concave (du fait de la décroissance de  $\phi$ ) et vérifie bien les conditions aux bornes  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$  (car  $\phi$  est d'intégrale égale à 1).

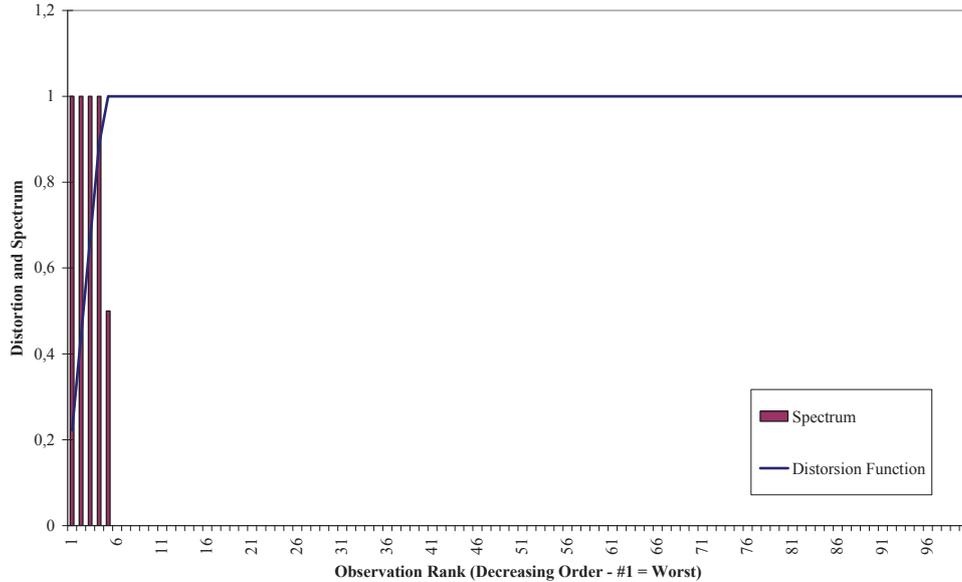
Nous pouvons alors appliquer ce mode de représentation des mesures de risque aux exemples que nous avons donnés plus haut. Nous les reprenons donc ici, du point de vue des mesures de distorsion.

**Exemple. Distorsion associée à l'Expected Shortfall.** D'après la relation de correspondance énoncée ci-dessus, la fonction  $f_\alpha^{ES}$  définie par

$$f_\alpha^{ES}(p) = \min\left(\frac{p}{\alpha}, 1\right),$$

pour  $p \in [0;1]$ , est la fonction de distorsion associée à l'Expected Shortfall de niveau  $\alpha \in ]0;1[$ .

Lorsqu'on fait tendre  $\alpha$  vers 1, on tombe sur la fonction de distorsion  $f = id$ , qui correspond à l'espérance. On remarque donc à nouveau que le cas limite où  $\alpha$  tend vers 1 mène tout droit à l'espérance mathématique.

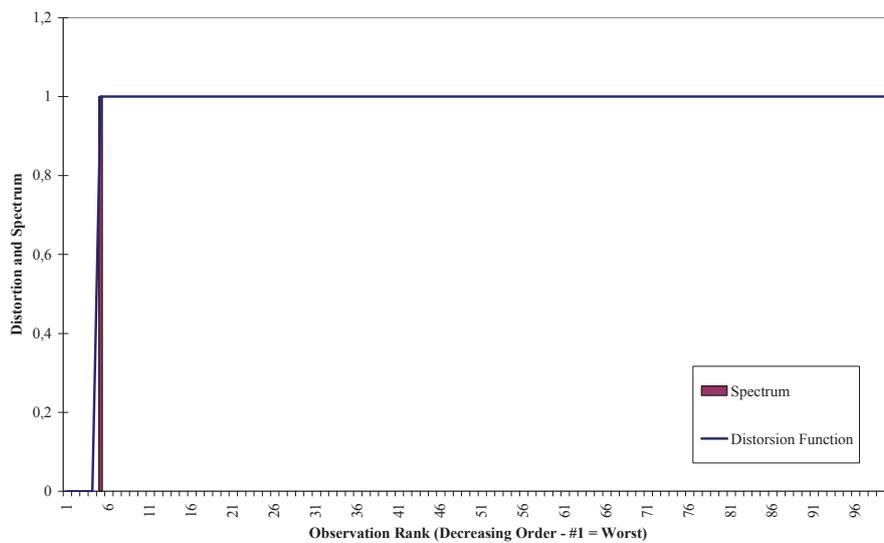


**Figure 6.4. Représentation du spectre et de la fonction de distorsion de l'ES.** En abscisse, le classement de l'observation parmi les rendements ordonnés (n°1 = pire rendement, n°100 = meilleur rendement). En ordonnée, l'intensité de la distorsion (courbe) et du spectre (histogramme). Le nombre d'observations est de 100 et le quantile de l'ES est de 4.5%.

**Exemple. Value at Risk et mesures de distorsion.** La Value-at-Risk ne peut être rigoureusement représentée par une mesure de distorsion telle que nous les définissons ci-dessus. Toutefois, si on souhaitait le faire, comme dans le cadre des mesures spectrales, on utiliserait la fonction  $f_{\alpha}^{VaR}$  définie par

$$f_{\alpha}^{VaR}(p) = \mathbf{1}_{[\alpha; 1]}(p).$$

On voit alors que  $f_{\alpha}^{VaR}$  est croissante, vérifie les conditions aux bornes pour être une fonction de distorsion, mais elle n'est pas concave. Il y a une correspondance entre ce défaut et le fait que la VaR n'est pas sous-additive.



**Figure 6.5. Représentation du « spectre » et de la fonction de distorsion de la VaR.** En abscisse, le classement de l'observation parmi les rendements ordonnés (n°1 = pire rendement, n°100 = meilleur rendement). En ordonnée, l'intensité de la distorsion (courbe) et du « spectre » (histogramme). Le nombre d'observations est de 100 et le quantile de l'ES est de 4.5%.

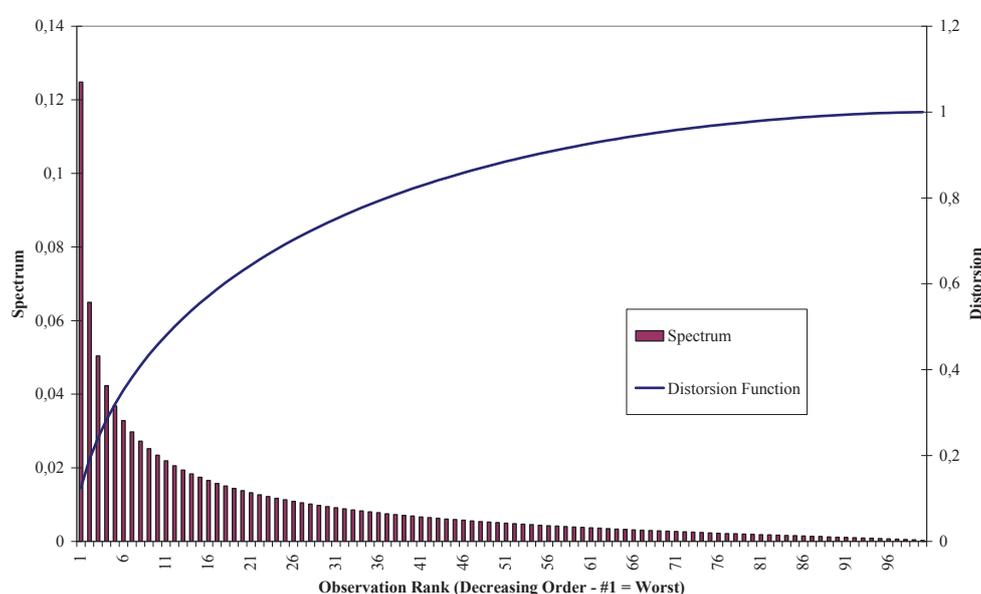
**Exemple. Transformation de Wang.** Nous présentons ici une mesure introduite et étudiée par S. Wang (2001). Il s'agit d'une mesure utilisée surtout en assurance pour des calculs de capital économique ; il s'agit de la mesure de distorsion associée à la fonction

$$f_q^{Wang}(p) = \Phi[\Phi^{-1}(p) - \Phi^{-1}(q)] = \Phi[\Phi^{-1}(p) - \lambda],$$

où  $\lambda = \Phi^{-1}(q)$  et où on impose  $0 < q < 0.5$  ( $\lambda < 0$ ). Le spectre associé est alors donné par

$$\phi_\lambda^{Wang}(p) = \exp\left(\lambda\Phi^{-1}(p) - \frac{\lambda^2}{2}\right).$$

Nous représentons ci-dessous le spectre et la fonction de distorsion associés à cette mesure de risque. On voit d'ailleurs que les conditions imposées à  $\lambda$  et  $q$  correspondent aux propriétés nécessaires à la fonction de distorsion (et au spectre).



**Figure 6.6. Représentation du spectre et de la fonction de distorsion de la Wang Transform.** En abscisse, le classement de l'observation parmi les rendements ordonnés (n°1 = pire rendement, n°100 = meilleur rendement). En ordonnée, l'intensité de la distorsion (courbe) et du spectre (histogramme). Le nombre d'observations est de 100 et le paramètre de quantile  $q$  vaut 12.0%.

**Remarque. Mesures de risque et rendements normaux.** Wang (2001) évoque la facilité à évaluer le risque associé à des rendements de portefeuille appartenant à certaines familles de lois (gaussiennes, log-normales, uniformes), au moyen de la Wang-Transform.

En fait, dans le cas d'un portefeuille au rendement  $X$  gaussien, étant donné une mesure de risque  $\rho$  simplement positivement homogène (H1) et invariante par translation (H2), on peut écrire  $\rho(X) = -\mathbf{E}[X] + \sigma(X)\rho(X_0)$ , où  $X_0$  suit une loi normale centrée réduite. Dans le cas de rendements de portefeuille gaussien, on voit alors que le calcul du risque associé se ramène à un calcul de moyenne et de variance, rappelant le cadre de Markovitz (1952).

Ceci a des implications en optimisation de portefeuille ; nous aurons l'occasion de l'évoquer par la suite.



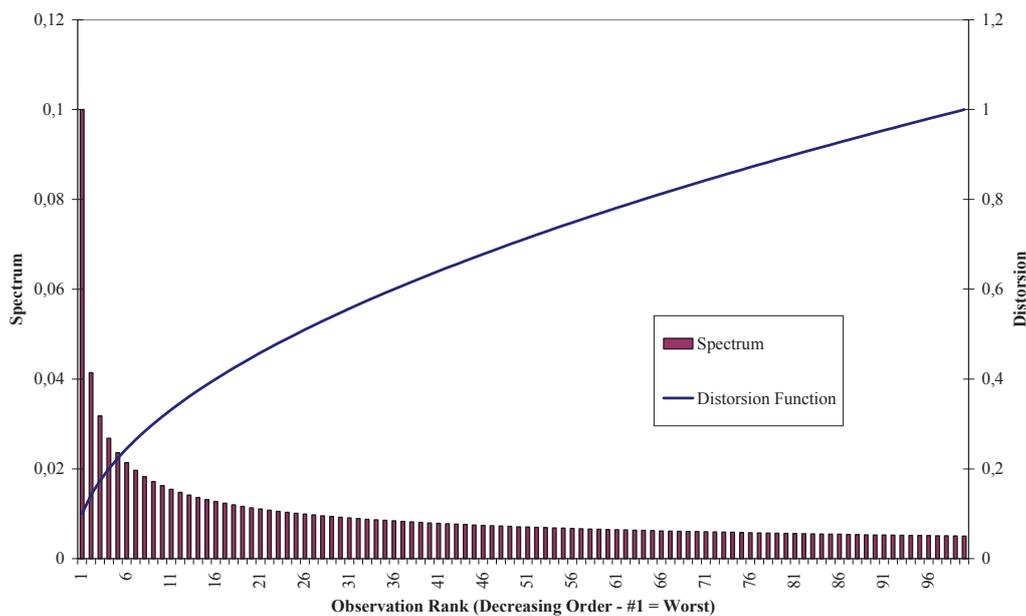
**Exemple. PH-Transform.** La PH-Transform est une mesure introduite dans Wang (1995), puis dans Wang, Panjer et Young (1997) et étudiée également par Jones et Zitikis (2003). Il s'agit de la mesure associée à la fonction de distorsion

$$f_r^{PHT}(p) = p^r,$$

où  $0 < r < 1$ , pour les mêmes conditions de croissance et de concavité requises que dans le cas de la Wang-Transform. Le spectre associé est alors donné par

$$\phi_r^{PHT}(p) = rp^{r-1}.$$

Cette mesure de risque présente un intérêt tout particulier en risque de crédit, dans les modèles à intensité notamment puisque la distorsion d'une probabilité de défaut liée à une intensité  $\lambda(\cdot)$  par PHT est une probabilité de défaut d'intensité  $r \cdot \lambda(\cdot)$ .



**Figure 6.7. Représentation du spectre et de la fonction de distorsion de la PH Transform.** En abscisse, le classement de l'observation parmi les rendements ordonnés (n°1 = pire rendement, n°100 = meilleur rendement). En ordonnée, l'intensité de la distorsion (courbe) et du spectre (histogramme). Le nombre d'observations est de 100 et l'exposant  $r$  est choisi égal à 0.50.

### c. Représentation des mesures de risque par scénarios généralisés

Le théorème de représentation des mesures cohérentes de risque par scénarios généralisés est un des résultats centraux de l'article d'Artzner et al. (1999) puisqu'il associe à une mesure cohérente un certain ensemble de mesures de probabilité (les scénarios) et le risque d'un rendement de portefeuille correspond alors à la pire valeur de l'espérance de rendement sur cet ensemble de scénarios.

Ici, nous allons donner une description explicite de cet ensemble dans le cas de l'Expected Shortfall et des mesures spectrales de risque. Nous nous ramenons donc ici à notre espace probabilisé  $(\Omega, \mathbf{A}, \mathbf{P})$  avec  $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  fini et  $\mathbf{P}(\omega_1) = \dots = \mathbf{P}(\omega_n) = \frac{1}{n}$ . On se donne

désormais un niveau de quantile  $\alpha \in ]0;1[$  (pour l'Expected Shortfall) et un spectre<sup>20</sup>  $\phi$  (pour les mesures spectrales de risque). Ainsi nous introduisons les notations suivantes, relatives au cas de l'Expected Shortfall :

-  $\mathbf{P}_\alpha$  représente la mesure de probabilité définie par

$$\begin{cases} \mathbf{P}_\alpha(\omega_i) = \frac{1}{n\alpha}, \forall 1 \leq i \leq \lceil n\alpha \rceil - 1; \\ \mathbf{P}_\alpha(\omega_{\lceil n\alpha \rceil}) = \frac{\lceil n\alpha \rceil - n\alpha}{n\alpha}; \\ \mathbf{P}_\alpha(\omega_i) = 0, \forall \lceil n\alpha \rceil + 1 \leq i \leq n \end{cases};$$

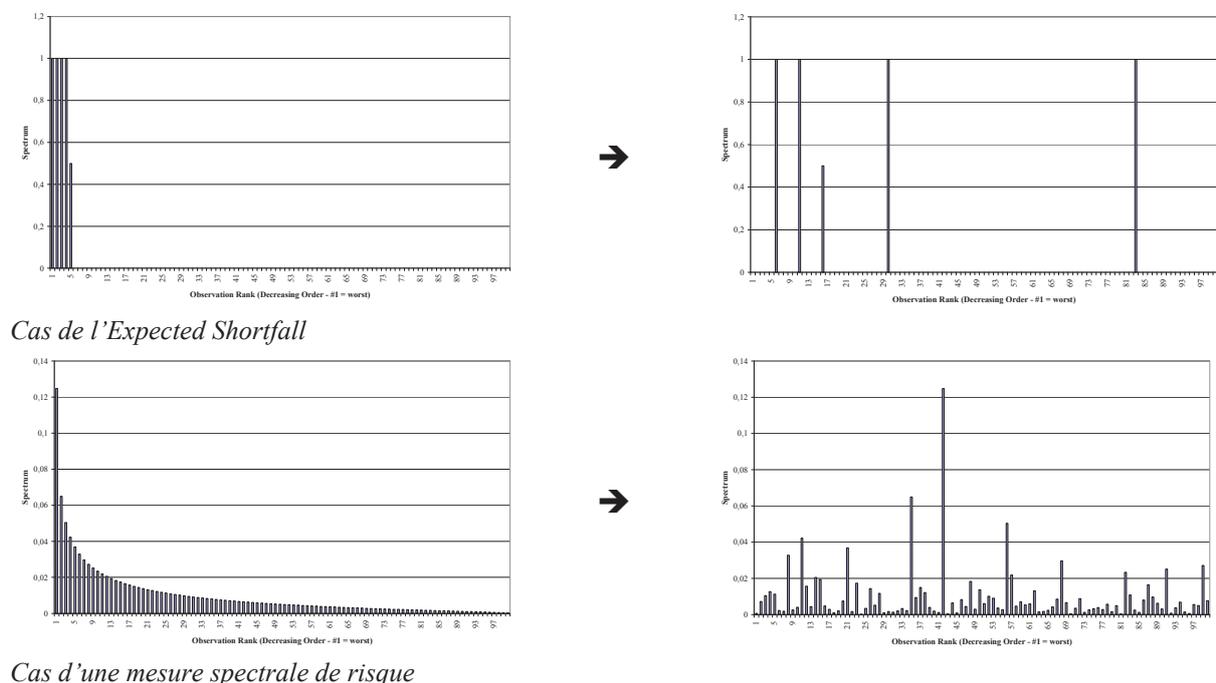
-  $\mathbf{P}_\alpha^\sigma$ , pour une permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  (on note  $\mathbf{S}_n$  l'ensemble de ces permutations), représente la mesure de probabilité définie par  $\forall 1 \leq i \leq n, \mathbf{P}_\alpha^\sigma(\omega_i) = \mathbf{P}_\alpha(\omega_{\sigma(i)})$ .

Par analogie, dans le cas des mesures spectrales, on pose :

-  $\mathbf{P}_\phi$  représente la mesure de probabilité définie par  $\forall 1 \leq i \leq n, \mathbf{P}_\phi(\omega_i) = \lambda_i = \int_{(i-1)/n}^{i/n} \phi(p) dp$  ;

-  $\mathbf{P}_\phi^\sigma$ , pour une permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ , représente la mesure de probabilité définie par  $\forall 1 \leq i \leq n, \mathbf{P}_\phi^\sigma(\omega_i) = \mathbf{P}_\phi(\omega_{\sigma(i)})$ .

Le schéma ci-dessous illustre le concept lié à  $\mathbf{P}_\alpha^\sigma$  et  $\mathbf{P}_\phi^\sigma$ .



**Figure 6.8. Exemple d'action d'une permutation sur un spectre.** Cette figure constitue un schéma de l'action d'une permutation sur le spectre d'une mesure spectrale de risque.

<sup>20</sup> Pour nous, on rappelle que l'appellation « spectre » fait référence de manière implicite à une fonction vérifiant entre autres les hypothèses de décroissance, de positivité et d'intégrale égale à 1 conformément aux définitions d'Acerbi (2002).

Le mode de calcul de l'Expected Shortfall et des mesures spectrales de risque dans notre cadre probabiliste à états finis (cf. sections 2.c. et 2.d. de ce chapitre) nous inspire, pour un rendement de portefeuille  $X$  donné, un intérêt tout particulier pour les permutations<sup>21</sup>  $\sigma_X$  telles que  $X(\omega_{\sigma_X(i)}) = x_{i:n}, 1 \leq i \leq n$ . En d'autres termes, c'est une permutation des événements de telle sorte que ceux-ci se rangent dans le même ordre que les réalisations historiques  $x_i$  du rendement  $X$ . Cette *permutation d'ordre* change donc d'un rendement aléatoire à l'autre.

D'après ces notations, on remarque alors que

$$ES_\alpha(X) = -\mathbf{E}^{\mathbf{P}_\alpha^{\sigma_X}}[X],$$

et

$$M_\phi(X) = -\mathbf{E}^{\mathbf{P}_\phi^{\sigma_X}}[X].$$

Nous faisons alors le lien avec le résultat d'Artzner et al. (1999) par la proposition suivante.

**Proposition. (Représentation par scénarios généralisés de l'Expected Shortfall et des mesures spectrales de risque).** Soit  $\alpha \in ]0;1[$  un niveau de quantile et  $\phi$  un spectre quelconques. Pour tout rendement de portefeuille  $X$ , on a alors :

$$ES_\alpha(X) = \sup\{-\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X], \mathbf{Q} \in \Pi_\alpha\} \text{ où } \Pi_\alpha = \{\mathbf{P}_\alpha^\sigma, \sigma \in \mathbf{S}_n\}.$$

De même :

$$M_\phi(X) = \sup\{-\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[X], \mathbf{Q} \in \Pi_\phi\} \text{ où } \Pi_\phi = \{\mathbf{P}_\phi^\sigma, \sigma \in \mathbf{S}_n\}.$$

De plus, pour ces mesures, la borne supérieure est en fait un maximum, qui est atteint pour le choix d'une des permutations d'ordre associées au rendement  $X$ .

**Preuve.** Cf. Annexes. ■

En particulier, la mesure de probabilité pour laquelle le maximum est atteint dans la représentation par scénarios généralisés dépend du rendement aléatoire dont on mesure le risque. Ce n'est pas le cas des ensembles de mesures de probabilité  $\Pi_\alpha$  et  $\Pi_\phi$ , comme requis dans ce type de représentation<sup>22</sup>.

<sup>21</sup> Dès lors que deux réalisations historiques  $x_i$  et  $x_j$  ( $i \neq j$ ) sont égales, il existe plusieurs permutations pouvant s'inscrire dans cette définition. Les résultats que nous considérons ici ne dépendent pas du choix d'une telle permutation.

<sup>22</sup> La proposition 4.1 d'Artzner et al. (1999) impose en effet à l'ensemble des scénarios généralisés d'être caractéristique de la mesure et non du rendement dont on mesure le risque.

## Chapitre 7. Mesures de risque et optimisation de portefeuille

Le problème d'optimisation de portefeuille, bien connu des gestionnaires d'actifs, consiste à composer à l'aide un ensemble d'actifs, le portefeuille le plus rentable étant donné un jeu de contraintes. Celles-ci peuvent concerner, comme dans notre cas, un niveau de risque maximal, une contrainte de budget, des expositions maximales et/ou minimales dans tel ou tel actif, etc. Le problème d'optimisation de portefeuille pose bien des questions, notamment au sujet de l'estimation de la loi jointe du rendement des actifs et de la méthode numérique de résolution.

Depuis Markovitz (1952) et ses travaux sur l'optimisation de portefeuille dans un cadre moyenne-variance, le problème a été largement revisité dans les années 1990-2000 avec les nouveaux indicateurs de risque que nous venons d'évoquer. Les travaux de Rockafellar et Uryasev (2000) étudient le cas de l'Expected Shortfall, et Acerbi et Simonetti (2002) s'intéressent au cas des mesures spectrales de risque.

Nous proposons dans ce chapitre, en illustration des notions que nous avons évoqués jusqu'ici, une étude du problème d'optimisation de portefeuille sous diverses contraintes de risque. Ici nous évoquons le problème d'estimation des mesures de risque puis nous proposons une section consacrée à la formalisation du problème et à sa méthode de résolution, pour certaines des mesures de risque introduites précédemment. Dans ce chapitre, nous allons traiter principalement le cas des mesures basées sur les moments (écart type, semi-variance, mesures de déviation de Fischer) puis le cas des mesures spectrales de risque avec un point particulier sur l'exemple de l'Expected Shortfall.

Nous proposons finalement en guise d'application une étude basée sur la détermination de portefeuilles optimaux de hedge funds d'une part, et d'actions (issues du secteur bancaire) d'autre part. Nous montrons alors principalement une certaine robustesse de la composition du portefeuille par rapport au choix de la mesure définissant la contrainte de risque.

### 1. Rappel des notations – Estimation des mesures de risque

#### a. Rappel des notations et formulation générale du problème d'optimisation

Nous rappelons ici les notations présentées au début du chapitre précédent. Nous considérons un ensemble de  $m$  actifs risqués dont on considère le rendement sur un horizon de temps donné, que nous fixons à un mois, rapport à notre étude empirique ultérieure. On considère une réalisation historique  $\{r_1, \dots, r_n\}$  du processus  $(R_t)_{1 \leq t \leq n}$  où  $R_t = (R_t^1, \dots, R_t^m)$  représente le vecteur des rendements de chaque actif à la date  $t$ .  $(R_t)_{1 \leq t \leq n}$  est donc un processus vectoriel à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ . On note ainsi  $r_t = (r_t^1, \dots, r_t^m)$  chaque réalisation à la date  $1 \leq t \leq n$  du vecteur des rendements.

Nous constituons ainsi des portefeuilles composés de ces  $m$  actifs en des proportions déterministes. Chacun de ces portefeuilles est identifié par un vecteur d'allocations  $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ . On note alors  $\Pi(a) = \left( \Pi(a)_t = \sum_{k=1}^m a_k R_t^k = a' R_t \right)_{1 \leq t \leq n}$  le processus (à

valeurs dans  $\mathbb{R}$ ) de ses rendements aléatoires et  $\pi(a) = \left( \pi(a)_t = \sum_{k=1}^m a_k r_t^k = a' r_t \right)_{1 \leq t \leq n}$  sa réalisation historique étant donné celle des rendements des actifs  $\{r_1, \dots, r_n\}$ .

Ici, l'objectif du gestionnaire est de déterminer une allocation de portefeuille répondant au problème de maximisation du rendement espéré du portefeuille sous plusieurs contraintes, dont une contrainte de risque. Pour cela, nous considérons une mesure de risque  $\rho$  représentant les préférences du gestionnaire.

Outre celle concernant le risque du portefeuille, nous ajoutons des contraintes supplémentaires d'inégalité ou d'égalité, affines par rapport à l'allocation. Il peut s'agir par exemple de contraintes de bornes sur les allocations, des contraintes d'inégalité ou d'égalité sur une combinaison linéaire entre plusieurs d'entre elles, etc.

Nous considérerons ainsi le problème suivant :

$$\max_{a \in \mathbb{R}^m} \mathbf{E}[\Pi(a)] \text{ s.c. } \begin{cases} \rho(\Pi(a)) \leq \omega; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases} \quad (\text{Problème A})$$

Les trois contraintes ainsi définies s'interprètent respectivement comme une contrainte de risque, une contrainte de budget et une contrainte interdisant le « *short-selling* » c'est-à-dire vente d'actifs à découvert. Notre axe d'étude principal va concerner en particulier l'impact du choix de la mesure  $\rho$  sur les allocations optimales. Nous considérerons essentiellement le cas de mesures basées sur les moments (écart-type, semi-variance, mesures de Fischer) et des mesures spectrales de risque (Expected Shortfall, mesure de Denneberg, Wang-Transform, etc.)

En fait, pour une mesure  $\rho$  fixée, il existe un grand nombre de manières d'estimer le risque associé à un rendement de portefeuille. Dans ce chapitre, nous faisons le choix de considérer les estimateurs empiriques définis dans le chapitre précédent. Ainsi nous reprenons les critères de risque que nous avons étudiés en nous basant sur des estimateurs empiriques de la loi de probabilité des rendements de portefeuille. En d'autres termes, nous reprenons les estimateurs adoptés dans Rockafellar et Uryasev (2002) et Acerbi et Simonetti (2002) en optimisation de portefeuille. La sous-section suivante étudie quelques résultats de convergence de ces estimateurs.

### **b. Estimation des mesures de risque : quelques résultats de convergence.**

Il existe un résultat de convergence dans le cas où on suppose que les rendements historiques du portefeuille sont indépendants et identiquement distribués. Dans Jones et Zitikis (2003) (cf. Théorème 3.1 de l'article) il est démontré que notre estimateur des mesures spectrales du chapitre précédent converge presque sûrement (donc en probabilité) vers la vraie valeur de la mesure dès lors que le spectre et les moments de la distribution du portefeuille vérifient certaines conditions techniques. Il est même établi la normalité asymptotique de l'estimateur sous des conditions supplémentaires (Théorème 3.2 des mêmes Jones et Zitikis (2003)). Nous rappelons ces conditions dans le théorème suivant, issu de la théorie des L-estimateurs.

**Théorème. (Convergence en probabilité de l'estimateur empirique d'une mesure spectrale – cas de rendements i.i.d.)** Pour un spectre  $\phi$  continu sur  $]0;1[$  vérifiant la condition  $|\phi(p)| \leq cp^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$ ,  $0 < p < 1$  avec  $\alpha, \beta > 0$  et  $c < +\infty$  et pour un rendement aléatoire  $X$  dont les observations historiques i.i.d. vérifient  $\mathbf{E}[|X_i|^\gamma] < +\infty$  avec  $\gamma > \max\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right)$ , alors on a la convergence suivante :

$$-\sum_{i=1}^n \lambda_i X_{i:n} \rightarrow -\int_0^1 \phi(p) F_{X_1}^{-1}(p) dp = M_\phi(X_1).$$

Si on ajoute les conditions  $|\phi(p)| \leq cp^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$ ,  $0 < p < 1$  avec  $\alpha, \beta > 1/2$  et  $c < +\infty$ , puis  $\mathbf{E}[|X_i|^\gamma] < +\infty$  pour  $\gamma > \max\left(\frac{1}{\alpha-1/2}, \frac{1}{\beta-1/2}\right)$ , on a convergence en loi de la variable  $\sqrt{n}\left(M_\phi(X_1) - \sum_{i=1}^n \lambda_i X_{i:n}\right)$  vers une loi normale centrée de variance finie<sup>23</sup>.

Un autre énoncé de ce théorème est donné dans Gouriéroux et Liu (2006a).

Toutefois, il existe des méthodes différentes, privilégiant par exemple des L-estimateurs un peu plus généraux : les estimateurs par noyaux. Citons par exemple Scaillet (2004) pour l'Expected Shortfall et Gouriéroux et Liu (2006b) pour la généralisation aux mesures spectrales de risque. On trouve entre autres dans ce dernier article l'expression de l'estimateur par noyau de la mesure spectrale d'un rendement de portefeuille ainsi que l'expression de la sensibilité de cet estimateur à l'allocation du portefeuille. Des lois asymptotiques de ces estimateurs sont également données sous des conditions plus générales que le cadre i.i.d. supposé dans Jones et Zitikis ou Gouriéroux et Liu (2006a).

Dans Chabaane et al. (2006) on trouve une étude comparative autour de trois estimateurs de la VaR : l'estimateur empirique, l'estimateur par noyaux et l'estimateur dit « GLS » (pour Gouriéroux, Laurent et Scaillet (2000)) défini de manière implicite (cf. Définition 2.5 de Chabaane et al. (2006)). Il en ressort que la sensibilité du problème d'optimisation de portefeuille au choix de l'estimateur de la VaR est relativement faible (c'est le cas pour les caractéristiques risque-rendement des portefeuilles efficients, légèrement moins pour les allocations optimales). Etant donné que toute mesure spectrale de risque s'écrit naturellement comme « combinaison linéaire continue » de VaRs, on peut espérer une certaine robustesse de la mesure du risque au choix de l'estimateur.

En définitive, notre choix d'un estimateur « empirique » pour les mesures de risque trouve des arguments à la fois dans les résultats de convergence évoqués ici et dans les résultats de robustesse quant au choix de l'estimateur de la VaR.

<sup>23</sup> Nous ne précisons pas ici l'expression de la variance asymptotique ; celle-ci est donnée dans le Théorème 3.2 de Jones et Zitikis (2003)

## 2. Optimisation de portefeuille et mesures de risque convexes

Ici, nous nous plaçons dans le cadre de Rockafellar et Uryasev (2002) ou d'Acerbi et Simonetti (2002) en considérant des estimateurs empiriques des mesures de risque, comme ceux que nous avons exposés dans le chapitre précédent de cette thèse. D'autre part, avec nos notations, le problème d'optimisation de portefeuille énoncé plus haut prend la forme suivante :

$$\max_{a \in \mathbb{R}^m} \mathbf{E}[\Pi(a)] \text{ s.c. } \begin{cases} \rho(\Pi(a)) \leq \omega; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases} \quad (\text{Problème A})$$

Nous considérons ici des mesures de risque **convexes**, c'est-à-dire vérifiant la propriété

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda \rho(X) + (1-\lambda) \rho(Y),$$

valable pour tous rendements aléatoires  $X$  et  $Y$  et pour tout réel  $0 \leq \lambda \leq 1$ . Les mesures spectrales de risque et les mesures de déviation que nous considérerons vérifient cette propriété. En revanche, ce n'est pas le cas de la VaR.

La fonction objectif – le rendement espéré – étant elle-même une fonction convexe (car linéaire) de l'allocation du portefeuille, d'après des résultats classiques d'optimisation convexe, le Problème A est alors équivalent aux problèmes suivants :

$$\min_{a \in \mathbb{R}^m} \rho(X(a)) \text{ s.c. } \begin{cases} \mathbf{E}[\Pi(a)] \geq \mu; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases} \quad (\text{Problème B})$$

et

$$\max_{a \in \mathbb{R}^m} \left[ \mathbf{E}[\Pi(a)] - \lambda \cdot \rho(\Pi(a)) \right] \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases} \quad (\text{Problème C})$$

En d'autres termes, tant que l'ensemble des autres contraintes (budget, bornes sur les allocations, etc.) définit un ensemble convexe par rapport à l'allocation, il y a équivalence entre :

- maximisation du rendement sous une contrainte de risque maximum ;
- minimisation du risque sous une contrainte de rendement minimum ;
- maximisation du Lagrangien associé.

Dans chacun de ces problèmes, il apparaît un paramètre caractéristique  $\omega$ ,  $r$  ou  $\lambda$ . Résoudre le problème d'optimisation pour différentes valeurs de ce paramètre permet alors d'obtenir une frontière efficiente.

### 3. Optimisation de portefeuille et mesures basées sur les moments

Cette section s'intéresse au problème énoncé ci-dessus, à savoir

$$\max_{a \in \mathbb{R}^m} \sum_{k=4}^m a_k \overline{r^k} \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \rho(\Pi(a)) \leq \omega; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

où la mesure de risque  $\rho$  est une mesure basée sur les moments de la distribution. Nous avons discuté de l'axiomatique de ces mesures en section 2.b du chapitre précédent. Parmi celles-ci nous avons principalement considéré les suivantes :

- l'**écart-type**  $SD(\Pi(a)) = -\overline{\pi(a)} + \alpha \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\pi(a)_i - \overline{\pi(a)})^2 \right)^{1/2}$  ou *Standard Deviation (SD)*, où  $\overline{\pi(a)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \pi(a)_i = \sum_{k=1}^m a_k \overline{r^k}$ ,  $\pi(a)_i = \sum_{k=1}^m a_k r_i^k$ ,  $1 \leq i \leq n$  et  $0 \leq \alpha \leq 1$  ;
- la **semi-variance**  $LSV(\Pi(a)) = -\overline{\pi(a)} + \alpha \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\pi(a)_i - \overline{\pi(a)})_-^2 \right)^{1/2}$  ou *Lower Semi-Variance (LSV)* avec les mêmes notations et la même condition sur  $\alpha$  ;
- plus généralement, les **mesures de déviation de Fischer**  $\rho_{q,\alpha}(\Pi(a)) = -\overline{\pi(a)} + \alpha \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\pi(a)_i - \overline{\pi(a)})_-^q \right)^{1/q}$  avec  $q \geq 1$  et  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

Nous utilisons ici des versions de l'écart-type et de la semi-variance comprenant à la fois le terme d'espérance et le terme de déviation spécifique de la mesure assorti d'un paramètre de levier  $\alpha$  dont nous montrerons bien vite l'impact nul dans le programme d'optimisation. Comme montré au chapitre précédent, la présence d'un terme d'espérance correspond au souci de validité de la mesure concernée par rapport à l'axiome d'invariance par translation.

D'autre part, nous ne proposerons pas ici de méthode de résolution du problème d'optimisation de portefeuille pour le cas le plus général de toutes les mesures de déviation de Fischer. Nous nous bornerons donc aux cas  $q = 2$  correspondant à la semi-variance et au cas  $q = 1$  d'une mesure de déviation absolue par rapport à la moyenne. Cette mesure est fréquemment utilisée dans la littérature d'optimisation de portefeuille sous le nom de *Mean-Absolute Deviation*<sup>24</sup>.

#### a. Optimisation sous contrainte d'écart-type.

Ici nous considérons l'écart-type comme mesure de risque, nous rappelons ici son expression dans le cadre de nos notations :

<sup>24</sup> C'est le cas, par exemple, de l'étude menée sur des portefeuilles d'indices de hedge funds dans McFall Lamm Jr. (2003) et celle de Krokmal, Uryasev et Zrazhevsky (2002) qui porte sur des fonds individuels.

$$SD(\Pi(a)) = -\overline{\pi(a)} + \alpha \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\pi(a)_i - \overline{\pi(a)})^2 \right)^{1/2}$$

Nous considérons ici le problème mis sous forme (Problème B), de minimisation du risque sous contrainte de rendement.

Ainsi, on s'aperçoit que le terme en  $-\overline{\pi(a)}$  dans l'expression ci-dessus de l'écart-type peut être éliminé. En effet, le problème d'optimisation est équivalent à sa forme lagrangienne (Problème C) dans laquelle on peut rassembler les termes d'espérance entre eux en laissant le terme de déviation « pure » tout seul. Ainsi, la présence du paramètre  $\alpha$  devient superflue.

Le programme d'optimisation mis sous forme (Problème B),

$$\min_{a \in \mathbb{R}^m} SD(\Pi(a)) \text{ s.c. } \begin{cases} \mathbf{E}[\Pi(a)] \geq \mu; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

devient

$$\min_{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=1}^m a_k (r_i^k - \overline{r^k}) \right]^2 \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_k \overline{r^k} \geq \mu; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

Il s'agit donc de minimiser une forme quadratique en dimension finie sur un ensemble convexe délimité par des sous-espaces affines, c'est-à-dire un polyèdre convexe. Ceci peut se réaliser à l'aide de méthodes numériques comme l'algorithme du point intérieur ou l'algorithme de descente du gradient. Les techniques d'optimisation sous contrainte d'écart-type sont notamment développées dans Markowitz (1987) et Lau et Womersley (1996).

## **b. Optimisation sous contrainte de déviation absolue par rapport à la moyenne (Mean-Absolute Deviation)**

La mesure concernée est la déviation absolue par rapport à la moyenne. Avec les notations précédentes, on l'estime de la manière suivante :

$$MAD(\Pi(a)) = -\overline{\pi(a)} + \alpha \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\pi(a)_i - \overline{\pi(a)})_- \right).$$

Cette mesure est une fonction affine par morceaux, convexe, de l'allocation  $a$ . Pour les mêmes raisons que dans le cas de l'écart type, le terme en  $-\overline{\pi(a)}$  est superflu en optimisation de portefeuille, il peut ainsi disparaître dans l'écriture finale du programme.

Nous introduisons des variables auxiliaires  $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$  correspondant aux parties négatives  $z_i = \left( \pi(a)_i - \overline{\pi(a)} \right)_-$ . Les  $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$  vérifient alors

$$\begin{cases} z_i \geq 0 \\ z_i \geq -\left( \pi(a)_i - \overline{\pi(a)} \right) = -\sum_{k=1}^m a_k (r_i^k - \overline{r^k}). \end{cases}$$

Nous utilisons ici encore la formulation (Problème B), c'est-à-dire le programme de minimisation du risque sous contrainte de rendement. Ici, cela donne

$$\min_{a \in \mathbb{R}^m} MAD(\Pi(a)) \text{ s.c. } \begin{cases} \mathbf{E}[\Pi(a)] \geq \mu; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

qui devient, après introduction des variables auxiliaires :

$$\min_{\substack{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m \\ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n}} \sum_{i=1}^n z_i \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_k \overline{r^k} \geq \mu; \\ \forall 1 \leq i \leq n, z_i \geq 0 \\ \forall 1 \leq i \leq n, z_i \geq -\sum_{k=1}^m a_k (r_i^k - \overline{r^k}). \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

Ce problème d'optimisation correspond à la minimisation, en dimension finie, d'une application linéaire sur un polyèdre convexe. Sa résolution fait donc appel à des techniques de programmation linéaire : nous avons utilisé un algorithme du simplexe (optimisé pour des matrices de contraintes à structure lacunaire) comme c'est le cas ici.

Le problème d'optimisation de portefeuille sous contrainte de *Mean-Absolute Deviation* est notamment étudié dans les travaux de Duarte (1999), Gilli et Kellezi (2000) et Krokhmal, Uryasev et Zrazhevsky (2002).

### c. Optimisation sous contrainte de Semi-Variance

Avec les notations précédentes, nous rappelons que la semi-variance s'écrit de la manière suivante :

$$LSV(\Pi(a)) = -\overline{\pi(a)} + \alpha \cdot \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left( \pi(a)_i - \overline{\pi(a)} \right)_-^2 \right)^{1/2}.$$

Cette mesure a la forme d'une fonctionnelle quadratique par morceaux et c'est également une fonction convexe de l'allocation  $a$ .

Comme dans le cas de la déviation absolue par rapport à la moyenne, nous introduisons des variables auxiliaires  $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$  correspondant aux parties négatives  $z_i = \left( \pi(a)_i - \overline{\pi(a)} \right)_-$  contenues dans l'expression ci-dessus. Celles-ci vérifient

$$\begin{cases} z_i \geq 0 \\ z_i \geq -\left( \pi(a)_i - \overline{\pi(a)} \right) = -\sum_{k=1}^m a_k \left( r_i^k - \overline{r^k} \right). \end{cases}$$

Nous allons de nouveau considérer le problème sous la forme (Problème B), c'est-à-dire le programme de minimisation du risque sous une contrainte de rendement. Ici, cela donne

$$\min_{a \in \mathbb{R}^m} LSV(\Pi(a)) \text{ s.c. } \begin{cases} \mathbf{E}[\Pi(a)] \geq \mu; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases},$$

qui devient, après introduction des variables auxiliaires :

$$\min_{\substack{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^m \\ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n}} \sum_{i=1}^n z_i^2 \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_k \overline{r^k} \geq \mu; \\ \forall 1 \leq i \leq n, z_i \geq 0 \\ \forall 1 \leq i \leq n, z_i \geq -\sum_{k=1}^m a_k \left( r_i^k - \overline{r^k} \right). \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

Ce problème d'optimisation correspond à la minimisation, en dimension finie, d'une forme quadratique, à nouveau sur un polyèdre convexe. Sa résolution fait donc appel aux mêmes méthodes de minimisation quadratiques que dans le cas de l'écart type. Cette fois, la différence de méthode provient de l'introduction de variables auxiliaires, comme dans le cas de la déviation absolue par rapport à la moyenne.

Le problème d'optimisation de portefeuille sous contraintes de LSV est traité notamment dans les travaux de Womersley et Lau (1996), Gilli et Këllezi (2000) et Konno, Waki et Yuuki (2002).

#### 4. Optimisation de portefeuille et mesures spectrales de risque

Comme expliqué en section 2.d. du chapitre précédent, les mesures spectrales de risque sont des mesures de risque convexes. Par conséquent, l'optimisation de portefeuille sous contrainte de mesures spectrales s'inscrit parfaitement dans le cadre défini plus haut.

Ici, nous allons procéder en étudiant successivement le cas, plus simple et plus largement traité dans la littérature scientifique, de l'Expected Shortfall, avant de détailler le programme d'optimisation dans le cas général des mesures spectrales de risque.

### a. Optimisation de portefeuille sous contrainte d'Expected Shortfall (ES)

Avec les notations adoptées jusqu'à présent, nous avons l'expression suivante pour l'ES, reprenant le cadre défini par Krokmal, Palmqvist et Uryasev (1999) puis Pflug (2000) et Rockafellar et Uryasev (2000) :

$$ES_{\alpha}(\Pi(a)) = -\frac{1}{\alpha} \left[ \sum_{i=1}^{\lceil n\alpha \rceil - 1} \pi(a)_{i:n} + (n\alpha - \lceil n\alpha \rceil + 1) \pi(a)_{\lceil n\alpha \rceil : n} \right].$$

Le problème numérique posé par cette expression est que l'évaluation de l'ES pour une allocation fixée nécessite la connaissance de la statistique d'ordre du vecteur des rendements du portefeuille associé

$$\pi(a)_{1:n} \leq \pi(a)_{2:n} \leq \dots \leq \pi(a)_{n:n}.$$

Cela revient à lancer une procédure de tri sur un tableau de taille  $n$  pour chaque valeur de l'allocation. Dans un problème d'optimisation de portefeuille, le temps de calcul deviendrait trop important par exemple dans une méthode de type *brute force* testant chaque allocation point par point sur un maillage de l'ensemble des possibles.

Par conséquent, nous utilisons ici une expression de l'Expected Shortfall introduite en section 2.c du chapitre précédent :

$$ES_{\alpha}(\Pi(a)) = \inf_{\zeta \in \mathbb{R}} \frac{1}{\alpha} \mathbf{E} \left[ (\zeta - \Pi(a))_+ \right] - \zeta.$$

La fonctionnelle définie par  $\Gamma_{\alpha}(a, \zeta) = \frac{1}{\alpha} \mathbf{E} \left[ (\zeta - \Pi(a))_+ \right] - \zeta$  est convexe par rapport au  $(m+1)$ -uplet  $(a, \zeta)$ , tend vers  $+\infty$  en  $\pm\infty$  par rapport à  $\zeta$ , donc admet un minimum global sur  $\mathbb{R}$  selon  $\zeta$ . De plus, l'ensemble des valeurs de  $\zeta$  pour lequel ce minimum est atteint contient le point

$$\zeta_{\alpha} = F_{\Pi(a)}^{-1}(\alpha) = -VaR_{\alpha}(\Pi(a)).$$

C'est d'ailleurs l'extrémité inférieure de l'intervalle défini par  $\underset{\zeta \in \mathbb{R}}{\text{Arg min}} \Gamma_{\alpha}(a, \zeta)$  (cf. Corollaire 15 de Rockafellar et Uryasev (2002)).

Comme dans le cas des mesures de déviation, nous reprenons la formulation (Problème B) du problème d'optimisation de portefeuille correspondant à la minimisation du risque sous contrainte de rendement

$$\min_{a \in \mathbb{R}^m} ES_{\alpha}(\Pi(a)) \text{ s.c. } \begin{cases} \mathbf{E}[\Pi(a)] \geq \mu; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

qui devient alors

$$\min_{\zeta \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^m} \Gamma_{\alpha}(a, \zeta) \text{ s.c. } \begin{cases} \mathbf{E}[\Pi(a)] \geq \mu; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}.$$

Comme dans le cas de la déviation absolue par rapport à la moyenne (cf. section 3.b de ce chapitre), la fonctionnelle  $\Gamma_\alpha$  contient des parties positives dans son expression ; nous allons donc introduire des variables auxiliaires  $(z_i)_{1 \leq i \leq n}$  définies par

$$\forall 1 \leq i \leq n, z_i = \left( \zeta - \pi(a)_i \right)_+ = \left( \zeta - \sum_{k=1}^m a_k r_i^k \right)_+.$$

Ces variables auxiliaires vérifient en particulier

$$\forall 1 \leq i \leq n, \begin{cases} z_i \geq \zeta - \sum_{k=1}^m a_k r_i^k \\ z_i \geq 0 \end{cases}.$$

Le problème d'optimisation devient alors

$$\min_{\substack{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m \\ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n \\ \zeta \in \mathbb{R}}} -\zeta + \frac{1}{n\alpha} \sum_{i=1}^n z_i \quad \text{s.c.} \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_k \bar{r}^k \geq \mu; \\ \forall 1 \leq i \leq n, z_i \geq 0 \\ \forall 1 \leq i \leq n, z_i \geq \zeta - \sum_{k=1}^m a_k r_i^k, \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

après introduction des variables auxiliaires.

Notons que ce problème de minimisation prend en compte  $(n+m+1)$  variables et  $2(n+m+1)$  contraintes, soit une matrice de contraintes de dimension  $2(n+m+1)^2$ ,  $n$  étant la taille de l'historique de données et  $m$ , le nombre d'actifs.

Comme dans le cas de l'optimisation sous contrainte de déviation absolue par rapport à la moyenne, nous avons affaire à la minimisation en dimension finie d'un objectif linéaire sur un polyèdre convexe (borné ou non). La résolution numérique de ce problème fait appel à un algorithme du simplexe et nous appliquons la même méthode numérique que dans le cas de la déviation par rapport à la moyenne (notre procédure tient également compte de la structure lacunaire de la matrice de contraintes).

## **b. Optimisation de portefeuille – le cas général des mesures spectrales de risque**

Le cas des mesures spectrales est traité en détail dans les travaux d'Acerbi et Simonetti (2002).

Nous rappelons (cf. section 2.d du chapitre précédent) que ces mesures sont paramétrées par un spectre  $\phi$ , c'est-à-dire une fonction définie de  $]0;1[$  dans lui-même, positive, décroissante et d'intégrale égale à 1. Considérons alors un spectre quelconque  $\phi$ . Rappelons qu'avec nos notations, une mesure spectrale s'exprime alors de la manière suivante :

$$M_\phi(\Pi(a)) = -\sum_{i=1}^n \lambda_i \pi(a)_{i,n},$$

où  $\lambda_i = \int_{(i-1)/n}^{i/n} \phi(p) dp$ , vérifiant ainsi  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  et  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ .

Comme pour l'Expected Shortfall, nous avons ici un problème numérique dans l'évaluation d'une mesure spectrale. En effet, pour une allocation de portefeuille donnée, il faut effectuer une procédure de tri sur les valeurs des rendements du portefeuille afin d'obtenir la statistique d'ordre.

Ici, de manière similaire à Pflug (2000), Rockafellar et Uryasev (2000) et à Bassett, Koenker et Kordas (2004), Acerbi et Simonetti (2002) mettent en évidence une fonctionnelle convexe dont la valeur minimale est une mesure spectrale.

Dans le cas de l'Expected Shortfall, nous avons une seule variable « intermédiaire »  $\zeta$  au niveau de la fonctionnelle  $\Gamma_\alpha$ . Pour une mesure spectrale,  $\zeta$  est remplacée par une fonctionnelle  $\psi : ]0;1[ \rightarrow ]0;1[$ . Ainsi, dans le cas de l'Expected Shortfall, on se souvient qu'après minimisation de la fonctionnelle  $\Gamma_\alpha$  selon  $\zeta$  à allocation  $a$  fixée, la valeur de  $\zeta$  représentait le quantile  $F_{\Pi(a)}^{-1}(\alpha)$ . Ici, après minimisation de la fonctionnelle par rapport à  $\psi(\cdot)$  et à allocation  $a$  fixée,  $\psi(\cdot)$  s'identifie à la fonction de quantile du portefeuille  $\Pi(a)$ , c'est-à-dire qu'on a  $\forall p \in ]0;1[, \psi(p) = F_{\Pi(a)}^{-1}(p)$ . Ce résultat est démontré dans Acerbi et Simonetti (2002).

L'analogue de la fonctionnelle  $\Gamma_\alpha$  pour les mesures spectrales, nous la notons  $\Gamma_\phi$ , est alors définie ainsi :

$$\Gamma_\phi(a, \psi(\cdot)) = -\phi(1) \mathbf{E}[\Pi(a)] + \int_0^1 \left\{ \alpha \psi(\alpha) - \mathbf{E}[(\psi(\alpha) - \Pi(a))^+] \right\} d\phi(\alpha).$$

Cette fonctionnelle est convexe et affine par morceaux par rapport à ses arguments  $a$  et  $\psi(\cdot)$ . De plus, pour chaque allocation  $a$ , on a

$$\min_{\psi(\cdot)} \Gamma_\phi(a, \psi(\cdot)) = M_\phi(\Pi(a))$$

Le problème de minimisation du risque sous contrainte de rendement (Problème B)

$$\min_{a \in \mathbb{R}^m} M_\phi(\Pi(a)) \text{ s.c. } \begin{cases} \mathbf{E}[\Pi(a)] \geq \mu; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

devient alors :

$$\min_{a \in \mathbb{R}^m, \psi(\cdot)} \Gamma_\alpha(a, \psi(\cdot)) \text{ s.c. } \begin{cases} \mathbf{E}[\Pi(a)] \geq \mu; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

Dans notre cadre, un portefeuille est représenté par le vecteur de ses  $n$  rendements, ainsi la variable  $\psi(\cdot)$  est discrétisée et remplacée par des variables intermédiaires que nous notons  $(\psi_j)_{1 \leq j \leq n}$ . Nous posons également

$$\begin{cases} \Delta\phi_j = \lambda_{j+1} - \lambda_j \leq 0, \forall 1 \leq j \leq n-1 \\ \Delta\phi_n = -\lambda_n \end{cases}$$

La version discrète de la fonctionnelle  $\Gamma_\phi$  prend alors la forme suivante :

$$\Gamma_\phi(a, (\psi_j)_{1 \leq j \leq n}) = \sum_{j=1}^n \Delta\phi_j \left\{ j\psi_j - \sum_{i=1}^n (\psi_j - \Pi(a)_i)_+ \right\},$$

à des facteurs constants multiplicatifs près, qui n'ont aucune influence dans le programme de minimisation.

Comme dans les cas précédents, nous introduisons les variables auxiliaires liées aux parties positives. On pose alors  $z_{i,j} = (\psi_j - \Pi(a)_i)_+ = \left( \psi_j - \sum_{k=1}^m a_k r_i^k \right)_+$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , les  $(z_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  vérifiant alors

$$\begin{cases} z_{i,j} \geq \psi_j - \sum_{k=1}^m a_k r_i^k \\ z_{i,j} \geq 0 \end{cases}$$

Finalement, le programme d'optimisation final prend la forme suivante :

$$\min_{\substack{a \in \mathbb{R}^m \\ (z_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2} \\ (\psi_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n}} \left\{ \sum_{j=1}^n (j\Delta\phi_j) \psi_j - \sum_{i,j=1}^n (\Delta\phi_j) z_{i,j} \right\} \text{ s.c. } \begin{cases} \sum_{k=1}^m a_k \bar{r}^k \geq \mu; \\ \forall 1 \leq i, j \leq n, z_{i,j} \geq 0 \\ \forall 1 \leq i, j \leq n, z_{i,j} \geq \psi_j - \sum_{k=1}^m a_k r_i^k; \\ \sum_{k=1}^m a_k = 1; \\ \forall 1 \leq k \leq m, 0 \leq a_k \leq 1. \end{cases}$$

Notons que ce problème de minimisation prend en compte  $(m+n+n^2)$  variables et  $2(n^2+m+1)$  contraintes, soit une matrice de contraintes dont la dimension est de l'ordre de  $n^4$ ,  $n$  étant la taille de l'historique de données.

Comme dans le cas de l'optimisation sous contrainte d'Expected Shortfall, nous avons affaire à un problème de minimisation en dimension finie d'un objectif linéaire sur un polyèdre convexe et nous le résolvons numériquement à l'aide d'un algorithme du simplexe.

## 5. Quelques remarques sur l'optimisation sous contrainte de Value-at-Risk

Comme nous l'évoquions au chapitre précédent, la VaR n'est pas sous-additive ; par conséquent, ce n'est pas une mesure convexe. Ainsi, l'équivalence entre les problèmes A, B et C n'est plus valide. En particulier, il existe plusieurs minima locaux, rendant la résolution numérique du problème difficile.

Il existe des méthodes basées sur des algorithmes génétiques (cf. Chabaane et al. (2006)) permettant de remédier à cela mais leur utilisation opérationnelle n'est pas très pratique à cause de temps de calcul trop importants. Des méthodes de résolutions existent dans des cas particuliers, où les lois des rendements d'actifs appartiennent à certaines familles de loi paramétriques. Citons l'exemple simple où les rendements d'actifs suivent un vecteur gaussien : la résolution du problème devient alors une optimisation de portefeuille dans un cadre moyenne-variance.

Dans le cas général, le problème de minimisation de la VaR peut être vu comme un problème d'*Order Value Optimization* (OVO), d'après l'écriture naturelle de la VaR comme une statistique d'ordre dans un cadre non paramétrique. Ce type de problème d'optimisation est étudié dans Andreani, Dunder et Martinez (2003, 2005). La résolution revient alors :

- soit à minimiser une fonctionnelle linéaire sous 2 contraintes polynomiales d'ordre 2 (quadratiques) et des contraintes linéaires ; il s'agit du *problème primal* ;
- soit à minimiser un problème polynomial (non convexe) d'ordre 4 sous des contraintes linéaires ; il s'agit du *problème dual*.

La résolution du problème dual peut être effectuée à l'aide d'algorithmes de minimisation élaborés mais connus (Quasi-Newton ou Uzawa) mais reste difficile, d'un point de vue numérique. La résolution du problème primal est plus astucieuse et pourrait être trouvée à partir des travaux de Raber (1999). Ces pistes méritent sans doute d'être davantage exploitées.

## 6. Application à la création de portefeuilles optimaux de Hedge Funds

### a. Les Hedge Funds – présentation générale

#### - Définition

Le terme *Hedge Fund* désigne un organisme privé de gestion collective qui utilise des techniques de couverture pour spéculer sur les marchés financiers. La technique de gestion de ces fonds est dite « alternative » car elle ne se contente pas de répliquer un indice de référence, elle fait appel à des stratégies de trading dynamique. On les compare classiquement aux *Mutual Funds*, organismes de gestion collective soumis à une réglementation beaucoup plus stricte, limitant ainsi les options de gestion à la disposition du gérant.

Une des principales différences entre les deux types de fonds provient de l'*effet de levier* : là où les Hedge Funds peuvent avoir massivement recours à l'emprunt pour financer leur croissance, la réglementation stricte dont ils font l'objet limite les Mutual Funds dans ce sens. Pour les Hedge Funds, l'effet de levier peut aller de l'ordre de 5 à 100. Par contraste, dans les stratégies de gestion, les Mutual Funds sont tenus de se limiter aux marchés d'actions

Américain et Européen ou sur la valeur d'obligations d'Etat AAA. Enfin, la domiciliation *offshore* des Hedge Funds, c'est-à-dire dans des états où la réglementation financière est plus lâche (îles Jersey, îles Caïman, etc.), constitue un nouveau point de distinction par rapport aux Mutual Funds.

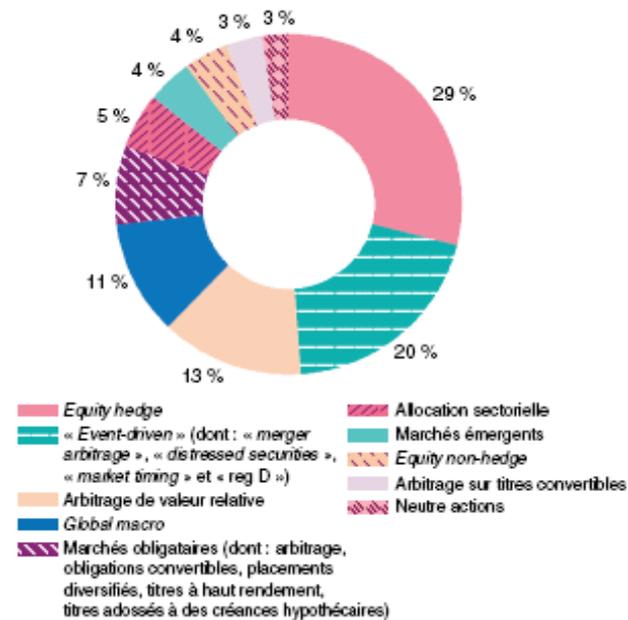
- *Les principaux types de Hedge Funds*

Depuis la création des Hedge Funds en 1949, leurs gérants utilisent des stratégies « alternatives » qu'on peut désormais regrouper dans les catégories suivantes :

- *Long/Short Equity* : stratégie basée sur des prises de position « actions », où le « court » finance le « long » sur fond de fort effet de levier ;
- *Short Sellers* : emprunt d'actions sur le marché Repo et vente à découvert de ces actions lorsqu'une baisse du cours est anticipée ;
- *Equity Market Neutral / Relative Value Arbitrage* : repérage et *trading* de produits sur- ou sous-évalués tout en gardant un portefeuille neutre aux risques du marché ; les fonds *relative value arbitrage* pratiquent ce genre de stratégie en supposant que les prix des produits en question vont converger vers leur estimation ;
- *Convertible Arbitrage* : prise de position sur des produits convertibles (typiquement, des *convertible bonds*) et gestion dynamique de la couverture associée en termes du sous-jacent ; le rebalancement du portefeuille de couverture permet alors de dégager des primes – fort effet de levier également ;
- *Event Driven* : sur la base d'actions, d'obligation corporate et d'options, cette stratégie vise à profiter des événements capitalistiques type fusion/acquisition ;
- *Global Macro* : stratégies basées sur les événements macroéconomiques – « retournements » fréquents de portefeuille et forts effets de levier ;
- *Emerging Market* : stratégies bases sur des titres *corporate* ou état, issus des pays émergents ;
- *Fixed Income Arbitrage* : arbitrages sur des produits de taux et de crédit uniquement, effet de levier supérieur à 10 ;
- *Commodities Trading Advisors / Managed Futures* : stratégies basées sur des produits taux, actions, change et matières premières (*commodities*) ; les techniques utilisées relèvent de l'arbitrage de produits cotés sur plusieurs marchés différents, sur du *trend following*, etc.

Sur les 1427 milliards de dollars d'actifs gérés par l'ensemble des Hedge Funds en 2007, la répartition en montant d'actifs gérés par type de stratégie peut être résumée dans le Graphique 7.1.

**Stratégies des *hedge funds* par actifs gérés**  
Total : 1 427 milliards de dollars



Source : HFR

**Graphique 7.1. Répartition des Hedge Funds par type de stratégie.** Les parts sont exprimées en montant d'actifs gérés sur le total d'actifs gérés par l'ensemble des Hedge Funds en 2007 (source *Hedge Fund Research* – <http://www.hedgefundresearch.com/>).

La réaction des gérants en temps de crise est également très révélatrice de prise de positions atypiques. Fung et Hsieh (1997b) montrent que les gérants multi-fonds ont tendance à fermer sagement leurs fonds alors que les gérants d'un unique fonds préfèrent les stratégies dites de *end-game*. Il s'agit de stratégies fortement directionnelles, de type « quitte ou double » : le gérant effectue un pari très risqué cherchant à profiter de l'état de crise, auquel il peut gagner gros comme tout perdre.

- *Rendements de Hedge Funds : profil optionnel ou modèle à facteurs ?*

Parmi les questions soulevées par les Hedge Funds, il y a celle de répliquer leur rendement. Cette question fut déjà abordée par Sharpe (1992) sur les Mutual Funds, avec une approche basée sur un modèle à facteurs type CAPM ou Fama et French (1993). Sur les Hedge Funds, Fung et Hsieh (1997a) tentent en vain de répliquer les rendements par un modèle basé sur 8 facteurs explicatifs pertinents sur des rendements de Mutual Funds. Cet échec constitue pour eux un nouvel élément de démonstration que les stratégies de gestion des Hedge Funds sont très différentes de celles des Mutual Funds.

Agarwal et Naik (2001) mettent en évidence des modes de réplication basés sur des stratégies de type *buy-and-hold* et des options, sur l'exemple des Hedge Funds de type *Event Driven* et *Relative Value*. Fung et Hsieh (2002) effectuent le même type de travail sur des fonds *CTA / Managed Futures*.

Enfin, une approche non-linéaire, nettement plus discutée, est développée dans Amin et Kat (2001) : le rendement d'un indice de Hedge Fund est approché par une estimation du profil optionnel de l'indice par rapport au S&P500. Ainsi, les auteurs établissent qu'il est possible

de répliquer un indice de Hedge Fund comme une option européenne sur S&P500, remettant en question le mode de rémunération des gérants de fonds spéculatifs.

Par ailleurs, une étude intéressante sur le comportement des gérants est menée par Barès, Gibson et Gyger (2001). A l'aide de procédés de classification successifs, cette étude montre qu'il existe parfois un biais entre le type de stratégie annoncé *ex-ante* par le gérant et son mode de gestion pratiqué *ex-post*. Par exemple, les fonds *Event Driven* ou *Relative Value* s'avèrent moins respectueux de la stratégie annoncée que les fonds *Long/Short*.

- *Une caractéristique des Hedge Funds : le biais de survie.*

Le taux d'attrition des Hedge Funds les distingue également des Mutual Funds : il est particulièrement élevé, de l'ordre de 5% à 12%. Fung et Hsieh (1997b) estiment par exemple le taux d'attrition des CTA à 19%, pour un taux correspondant de 1% parmi les Mutual Funds.

Barès, Gibson et Gyger (2001) montrent que les fonds utilisant des stratégies classiques de *trading* sont les moins enclins à disparaître, devant les *Long/Short* et *Event Driven*. Toujours selon la même étude, les *Relative Value* seraient les plus rapides à disparaître. En fait, l'exposition aux marchés est un facteur négatif sur la probabilité de survie. A contrario, les fonds qui ne se conforment pas à leur type de stratégie augmentent leur probabilité de survie.

Les gérants de Hedge Funds sont souvent rémunérés sous la forme d'un contrat dit de *high-water mark*, c'est-à-dire à la manière d'un *call* dont le sous-jacent serait le montant d'actifs sous gestion et le strike, la plus haute valeur de ce montant observée jusqu'alors. Ainsi, Brown, Goetzmann et Park (2001) remarquent que la volatilité peut être un levier utilisé par les gérants pour jouer sur leur rémunération. Ils montrent alors sur un échantillon de Hedge Funds CTA qu'une hausse de la volatilité augmente le risque de fermeture même si elle impliquerait par ailleurs une augmentation de la rémunération du gérant.

Le souci que crée le fort taux d'attrition chez les Hedge Funds s'appelle *biais de survie* (ou *survivorship bias*). Ce biais correspond au surcroît de rendement dû au fait que les fonds dont on mesure la performance sont des « survivants ». Si le taux de disparition est fort, ce biais peut s'avérer important. En effet, pour les Hedge Funds CTA par exemple, Fung et Hsieh l'évaluent à 3.42% (pour les Mutual Funds, il est d'environ 1% selon la même étude).

## **b. Présentation de la base de données**

Notre étude a été menée sur un échantillon de 16 Hedge Funds, pour lesquels nous disposons de rendements mensuels sur la période allant de janvier 1990 à juillet 2001 (inclus). Le Tableau 7.2 ci-dessous contient quelques statistiques descriptives de ces fonds, parmi lesquelles le rendement moyen ( $\mathbf{m}$ ), l'écart type ( $\mathbf{\sigma}$ ) ainsi que les indicateurs de skewness ( $\mathbf{s}$ ) et de kurtosis ( $\mathbf{\kappa}$ ). Comme le font Agarwal et Naik (2000), nous incluons également dans ce tableau les betas et les alphas de Jensen mensuels sur la base de l'indice S&P 500. Comme nous venons de l'évoquer ci-dessus, même si elles constituent un élément de mesure de la performance des fonds, ces grandeurs sont à prendre avec précaution en raison du biais de survie constaté sur les Hedge Funds.

HF	Hedge Funds	m	$\sigma$	s	$\kappa$	Sharpe Ratio	Betas	Alphas
1	AXA Rosenberg	0,46%	2,31%	0,17	5,92	0,20%	-14%	0,57%
2	Discovery MasterFund	0,51%	4,30%	-0,06	0,15	1,27%	2%	0,49%
3	Aetos Corporation	0,99%	2,34%	-0,36	3,40	22,88%	25%	0,79%
4	Bennett Restructuring Fund	1,25%	2,15%	-0,16	3,22	36,81%	16%	1,11%
5	Calamos Convertible Hedge Fund	0,85%	2,33%	0,15	1,16	17,18%	37%	0,56%
6	Sage Capital Limited Partnership	0,78%	0,70%	-0,67	1,34	47,04%	7%	0,72%
7	Genesis Emerging Markets Fund	0,84%	5,78%	-0,70	2,80	6,71%	78%	0,22%
8	RXR Secured Participating Note	0,97%	1,86%	0,49	2,13	27,94%	21%	0,81%
9	Arrowsmith Fund	2,01%	7,81%	3,05	26,20	19,89%	37%	1,71%
10	Blue Rock Capital Fund	0,69%	1,00%	0,35	3,28	24,23%	9%	0,62%
11	Dean Witter Cornerstone Fund IV	1,09%	6,69%	1,56	4,00	9,61%	-3%	1,12%
12	GAMut Investments Inc	1,86%	4,16%	0,71	2,03	33,79%	6%	1,81%
13	Aquila International Fund	0,79%	4,87%	-0,26	1,05	6,88%	69%	0,23%
14	Bay Capital Management	0,81%	5,57%	0,41	0,35	6,37%	24%	0,61%
15	Blenheim Investments	1,28%	8,54%	0,64	4,46	9,72%	10%	1,20%
16	Red Oak Commodity Advisors	1,52%	8,39%	0,41	1,56	12,69%	70%	0,96%

**Tableau 7.2. Statistiques descriptives sur les 16 Hedge Funds.** Les grandeurs affichées correspondent à une base mensuelle.

Dans notre cas, l'intérêt est d'étudier des portefeuilles optimaux dont les rendements ne suivent pas des lois standard. En effet, nous avons montré plus haut que, pour des rendements gaussiens par exemple, la détermination de portefeuilles optimaux pour n'importe quel mesure de risque positivement homogène et invariante par translation revenait au cadre moyenne-variance. En utilisant le test de normalité de Jarque-Bera, nous avons constaté que notre échantillon de Hedge Funds n'était pas gaussien. Le test de copule gaussienne de Malevergne et Sornette (2003) se révèle également négatif : le test de Kolmogorov-Smirnov d'adéquation à la loi du khi-deux donne une distance de 0,34 pour un échantillon de taille 139, ce qui correspond à une P-value inférieure à 1%.

Le Tableau 7.3 ci-dessous donne la mesure de risque individuelle de chaque fonds, pour les mesures suivantes : écart-type (notée SD ou StDev), la semi-variance (LSV), la mesure de Fischer (Fischer), la déviation absolue par rapport à la médiane (Denneberg absolute deviation ou DAD) pour  $a = 0,85$ , l'Expected Shortfall pour  $\alpha = 10\%$  et la Wang-Transform pour  $\lambda = 1,805$ .

Le choix du paramètre pour l'Expected Shortfall et la Wang-Transform est effectué par adéquation sur un rendement normal centré réduit :  $\lambda = 1,805$  et  $\alpha = 10\%$  correspondent à une valeur identique des deux mesures sur une variable  $N(0,1)$ . Le choix du paramètre pour la mesure de Fischer et la déviation absolue par rapport à la médiane, comme nous l'expliquions en sections 3 et 4 de ce chapitre, n'a quant à lui aucune importance (tant qu'il reste compris entre 0 et 1) : la valeur  $a = 0,85$  est donc parfaitement arbitraire.

	SD	LSV	ES (10%)	W-T ( $\lambda=1,805$ )	Fischer	DAD
HF 1	2,31%	1,66%	4,07%	4,19%	0,18%	0,24%
HF 2	4,31%	3,04%	7,28%	6,98%	0,91%	0,89%
HF 3	2,35%	1,71%	3,60%	3,86%	-0,33%	-0,33%
HF 4	2,16%	1,51%	2,52%	3,19%	-0,60%	-0,65%
HF 5	2,34%	1,63%	3,40%	3,23%	-0,11%	-0,11%
HF 6	0,71%	0,54%	0,68%	0,66%	-0,57%	-0,53%
HF 7	5,78%	4,36%	10,14%	11,91%	0,98%	1,24%
HF 8	1,86%	1,25%	2,17%	2,27%	-0,38%	-0,42%
HF 9	7,82%	4,34%	8,85%	11,89%	-0,24%	-0,62%
HF 10	1,00%	0,68%	1,02%	1,25%	-0,40%	-0,38%
HF 11	6,69%	3,81%	7,84%	7,15%	0,89%	0,57%
HF 12	4,17%	2,68%	4,73%	4,89%	-0,54%	-0,70%
HF 13	4,87%	3,53%	8,60%	8,44%	0,75%	0,77%
HF 14	5,58%	3,66%	7,87%	8,32%	1,04%	0,84%
HF 15	8,54%	5,69%	13,37%	13,96%	1,35%	0,80%
HF 16	8,40%	5,56%	12,56%	13,22%	1,12%	0,61%

**Tableau 7.3. Mesure de risque individuelle des 16 fonds.** Les grandeurs sont données sur une base mensuelle.

Le Tableau 7.4 ci-dessous donne également les corrélations de rang pour les 6 mêmes mesures de risque : ceci constitue une façon de comparer la façon dont les mesures classent nos 16 fonds en termes de risque. Le tableau nous montre que les classements sont quasiment identiques, à l'exception des mesures de Fischer et de Denneberg.

	St Dev	LSV	ES	W-T	FRM	DAD
St Dev	100	99	96	96	80	53
LSV	99	100	99	99	83	59
ES	96	99	100	100	83	60
W-T	96	99	100	100	83	60
FRM	80	83	83	83	100	89
DAD	53	59	60	60	89	100

**Tableau 7.4. Corrélations de rang entre mesures de risque.** Les paramètres utilisés sont les mêmes que ci-dessus. L'indicateur utilisé pour mesurer la corrélation de rang est le rho de Spearman. Celui-ci est défini par

$$\rho(\mu, \nu) = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{k=1}^n [ranking_{\mu}(A_k) - ranking_{\nu}(A_k)]^2 \quad \text{où } \mu, \nu \text{ sont deux mesures de risque et}$$

$ranking_{\mu}(A_k)$  ( $k \in \{1, \dots, 16\}$ ) désigne le classement du fonds n°  $k$  parmi les 16 fonds selon la mesure de risque  $\mu$ .

### c. Portefeuilles optimaux de Hedge Funds

Ici nous cherchons à déterminer les portefeuilles de risque minimal sous des contraintes de rendement, de budget (les allocations doivent sommer à 1) et sans vente à découvert

(allocations positives). Pour une allocation donnée  $a = (a_1, \dots, a_{16})$ , nous représentons alors les rendements de portefeuille historiques correspondants de la manière suivante :

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Date 1} & \pi(a)_1 & = a_1 r_1^1 + \dots + a_{16} r_1^{16} \\
 & \vdots & \\
 \text{Date } i & \pi(a)_i & = a_1 r_i^1 + \dots + a_{16} r_i^{16} \\
 & \vdots & \\
 \text{Date 139} & \pi(a)_{139} & = a_1 r_{139}^1 + \dots + a_{16} r_{139}^{16}
 \end{array}$$

Par exemple, pour une mesure spectrale de risque de spectre  $\phi$ , le risque associé au portefeuille d'allocation  $a$  se calcule en triant dans un premier temps ses rendements historiques :  $\pi(a)_{1:139} \leq \pi(a)_{2:139} \leq \dots \leq \pi(a)_{139:139}$ , puis en calculant une somme pondérée de

ces rendements,  $-\sum_{i=1}^{139} \lambda_i \pi(a)_{i:139}$ , avec  $\lambda_i = \int_{(i-1)/139}^{i/139} \phi(p) dp$ .

En reprenant ce que nous exposons en détail en section 4, le programme d'optimisation s'écrit alors  $\min_a -\sum_{i=1}^{139} \lambda_i \pi(a)_{i:139}$  avec  $a_i \geq 0$ ,  $i = 1, \dots, 16$ ,  $a_1 + \dots + a_{16} = 1$  et  $\frac{1}{139} \sum_{i=1}^{139} \pi(a)_i = \bar{r}$  (contrainte de rendement).

Grâce à l'utilisation des méthodes numériques décrites précédemment dans ce chapitre, nous avons réussi à obtenir les allocations optimales pour différents niveaux de rendement  $\bar{r}$ . Nous les représentons alors dans les figures ci-dessous, pour les mêmes mesures de risque et les mêmes jeux de paramètres que dans la sous-section précédente.

- *Allocations optimales – mesures basées sur les moments*

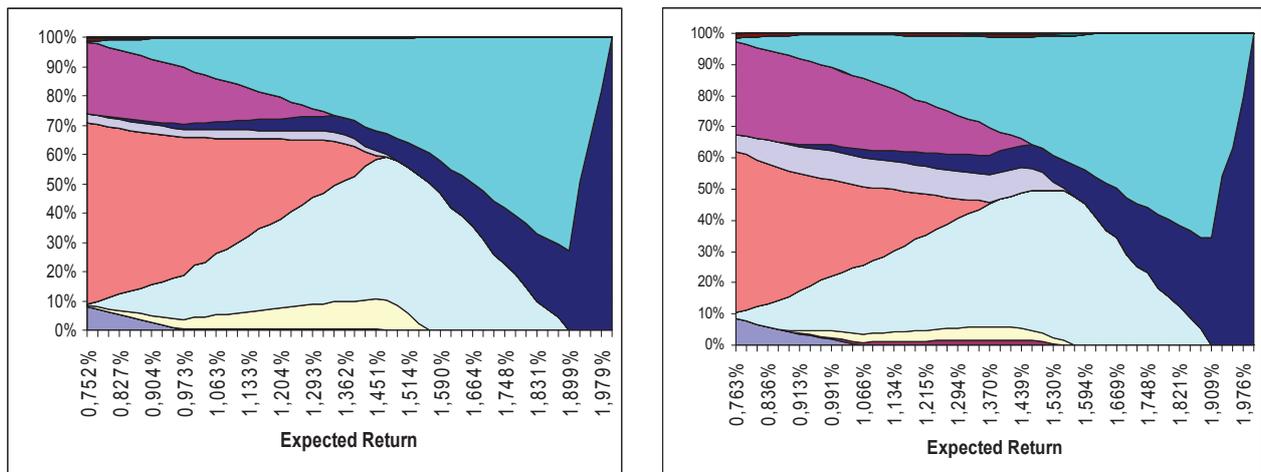


Figure 7.5. Allocations optimales dans le cas de l'écart-type (à gauche) et de la semi-variance (à droite)

- Allocations optimales – mesures de déviation

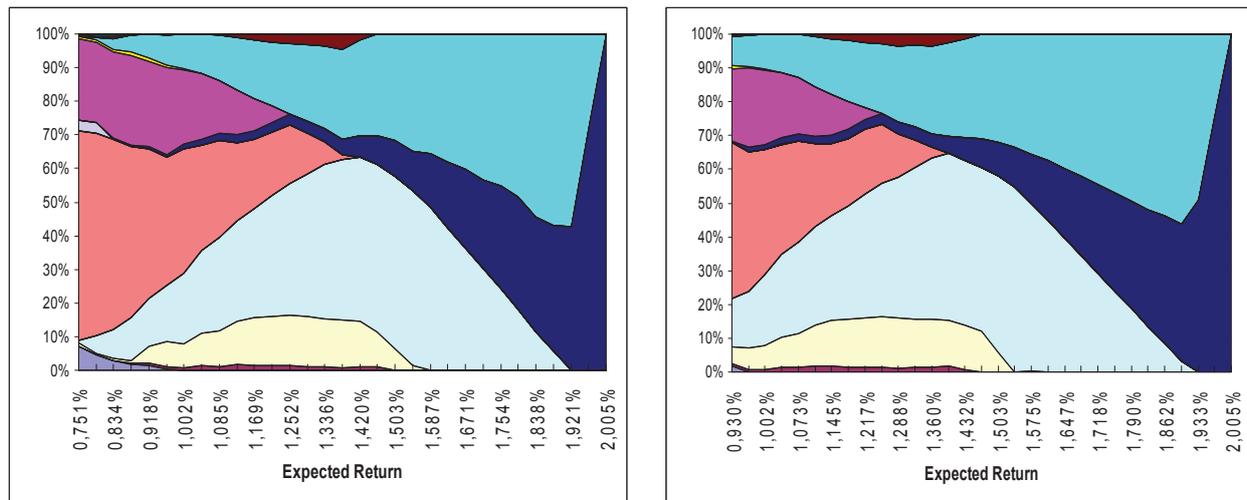


Figure 7.6. Allocations optimales dans le cas de la mesure de Fischer (à gauche) et de la déviation par rapport à la médiane (à droite).

- Allocations optimales – mesures spectrales de risque

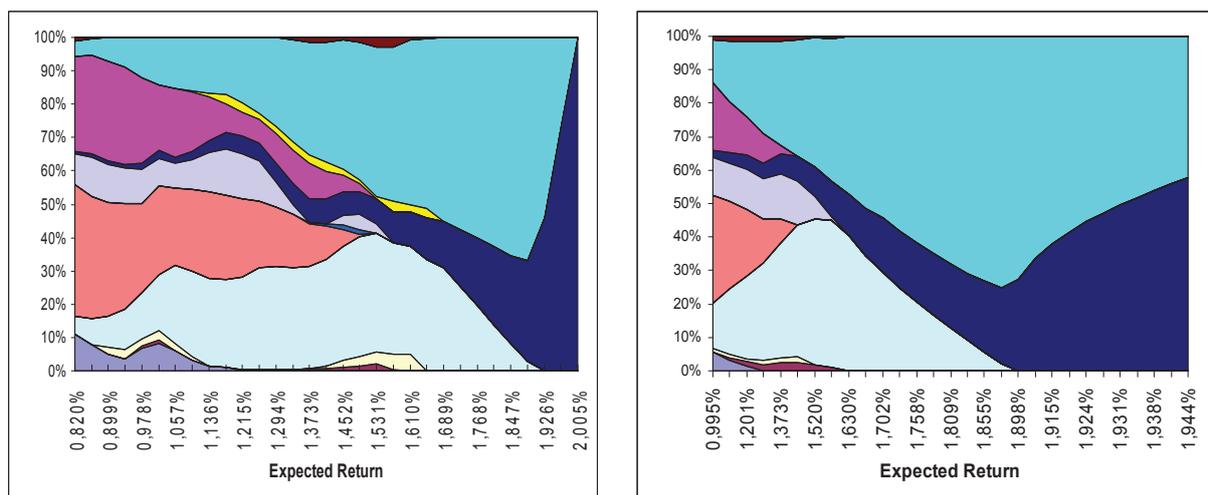


Figure 7.7. Allocations optimales dans le cas de l'Expected Shortfall ( $\alpha=10\%$ , à gauche) et de la Wang-Transform ( $\lambda=1,805$ , à droite).

**Légende**

■ AXA Rosenberg Market Neutral Strategy LP	■ Discovery MasterFund Ltd
■ Aetos Corporation	■ Bennett Restructuring Fund LP
■ Calamos Convertible Hedge Fund LP	■ Sage Capital Limited Partnership
■ Genesis Emerging Markets Fund Ltd	■ RXR Secured Participating Note
■ Arrowsmith Fund Ltd	■ Blue Rock Capital Fund LP
■ Dean Witter Cornerstone Fund IV LP	■ GAMut Investments Inc
■ Aquila International Fund Ltd	■ Bay Capital Management
■ Blenheim Investments LP (Composite)	■ Red Oak Commodity Advisors Inc

Il apparaît que les profils d'allocation optimale sont relativement proches, d'une mesure à l'autre. Ce résultat confirme ceux de Krokmal et al. (2002) sur les mesures de déviation (CVaR, *conditional drawdown at risk*, *mean absolute deviation* et *maximum loss*) et ceux de

Chabaane et al. (2006) sur l'Expected Shortfall, la semi-variance et différents estimateurs de la VaR. Malgré la diversité des mesures de risque, les deux travaux mettent en évidence des allocations optimales relativement proches.

Pour étudier plus précisément la proximité entre les portefeuilles efficients, nous avons étudié les caractéristiques des portefeuilles optimaux solutions du programme d'optimisation pour un niveau de rendement exigé de 1,04%, en faisant varier le critère de risque parmi les 6 mesures que nous avons choisi jusqu'à présent. Le choix du niveau de rendement de 1,04% s'explique au vu des graphiques ci-dessus : ce niveau correspond à une zone où les portefeuilles optimaux sont relativement bien diversifiés. On imagine alors trouver les plus grandes disparités entre les différentes mesures dans cette zone de rendements. Le tableau 7.8 contient quelques caractéristiques de 6 portefeuilles qui en découlent et à première vue, elles sont relativement proches.

Par ailleurs, comme le recommandent les travaux de Hahn, Pfungsten et Wagner (2002) et de Sharma (2004), le calcul des corrélations de rang entre les vecteurs de rendements historiques des 6 portefeuilles est un bon indicateur de leur proximité. Dans le tableau 7.9, les résultats sont assez révélateurs, puisque toutes les corrélations se situent au-delà de 80%. Ainsi, d'une manière générale, on note une certaine robustesse du profil d'allocation optimale par rapport au choix de la mesure.

	Efficient Portfolios					
	St Dev	LSV	ES	Wang	DAD	FRM
<b>Expected return</b>	1,04%	1,04%	1,04%	1,04%	1,04%	1,04%
<b>Minimum return</b>	-1,72%	-1,48%	-1,38%	-0,64%	-2,14%	-2,12%
<b>Maximum return</b>	3,81%	3,86%	3,86%	4,27%	4,33%	4,32%
<b>Standard deviation</b>	0,89%	0,92%	0,92%	1,01%	0,91%	0,91%
<b>Lower semi-variance</b>	0,62%	0,60%	0,61%	0,64%	0,64%	0,64%
<b>Expected shortfall</b>	0,30%	0,24%	0,21%	0,34%	0,34%	0,35%
<b>Wang transform</b>	0,56%	0,48%	0,45%	0,29%	0,72%	0,71%
<b>Denneberg absolute deviation</b>	-0,66%	-0,70%	-0,66%	-0,69%	-0,72%	-0,71%
<b>Fischer risk measure</b>	-0,71%	-0,70%	-0,68%	-0,65%	-0,72%	-0,72%

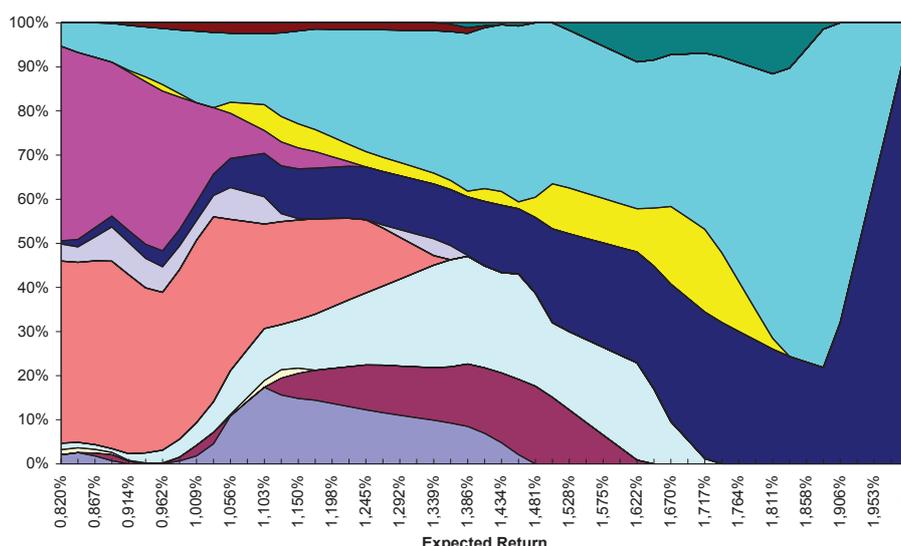
**Tableau 7.8. Quelques caractéristiques de 6 portefeuilles optimaux.** Chaque colonne correspond au portefeuille de risque minimal pour la mesure indiquée, et au niveau de rendement moyen mensuel imposé de 1.04%. Chaque ligne contient la caractéristique correspondante. Par exemple, la case « Fischer risk measure » de la colonne « LSV » correspond à la mesure de Fischer du portefeuille de rendement moyen 1,04% et optimal pour la semi-variance (LSV).

	St Dev	LSV	ES	Wang	DAD	FRM
<b>St Dev</b>	100%	98%	97%	89%	97%	97%
<b>LSV</b>	98%	100%	99%	92%	94%	94%
<b>ES</b>	97%	99%	100%	92%	93%	93%
<b>Wang</b>	89%	92%	92%	100%	81%	81%
<b>DAD</b>	97%	94%	93%	81%	100%	100%
<b>FRM</b>	97%	94%	93%	81%	100%	100%

**Tableau 7.9. Corrélations de rang entre les 6 portefeuilles optimaux.** Les corrélations de rang comparent les classements des 139 rendements historiques de chacun des 6 portefeuilles. L'estimateur des corrélations utilisé ici est une nouvelle fois le rho de Spearman.

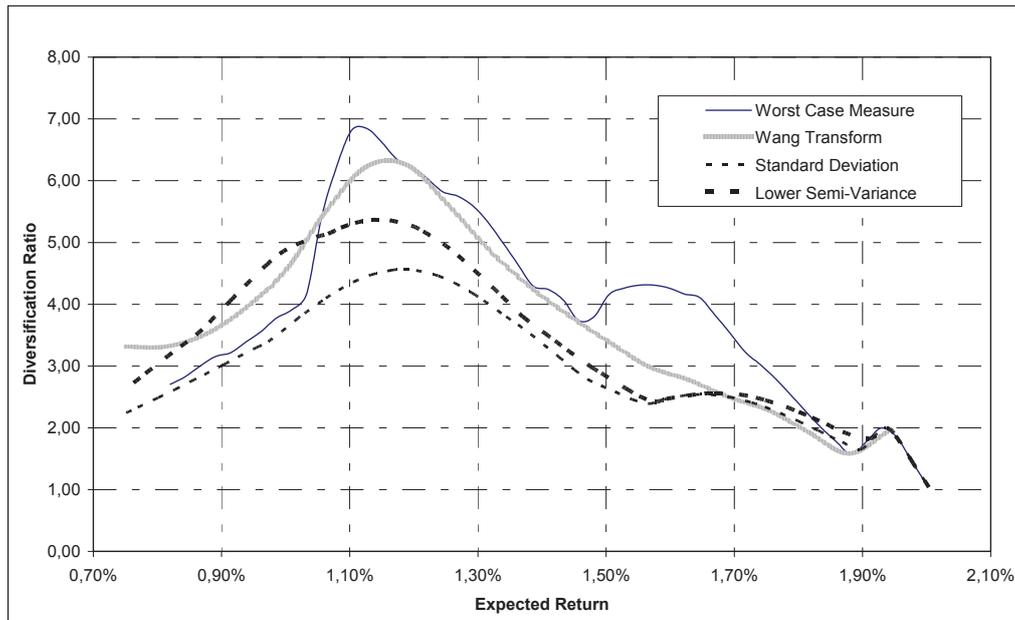
Nous avons cherché à éprouver davantage ce résultat de robustesse en reproduisant l'étude comparative que nous venons d'exposer, pour des Expected Shortfalls de différents niveaux (pour des quantiles compris entre 5% et 40%). Les corrélations de rang sont à nouveau toutes situées au-delà de 80%. De plus, une analyse en composantes principales met en évidence un facteur expliquant plus de 95% de la dispersion totale de ces 7 portefeuilles efficients. Ce résultat confirme la robustesse des allocations optimales par rapport au choix de la mesure de risque puisque nous avons vu que toute mesure spectrale de risque peut s'exprimer comme somme pondérée d'Expected Shortfalls.

En fait, lorsqu'on choisit des mesures de risque davantage portées sur les cas extrêmes, les profils d'allocation optimale évoluent. La figure 7.10 montre le profil associé à la mesure de risque dite du *Worst Case* (ou *maximum loss*), correspondant en fait dans notre cas à une Expected Shortfall de quantile  $\alpha \leq \frac{1}{139}$ . Par comparaison avec le profil associé à l'ES 10% (cf. Figure 7.7), certains actifs comme HF1 et HF2 apparaissent dans des proportions plus importantes dans cette zone où les portefeuilles optimaux sont relativement diversifiés (pour des rendements exigés de 1,1% à 1,6%). La présence plus importante de tels actifs s'explique sans doute par les effets de réduction de risque par diversification qu'ils impliquent au sein des portefeuilles efficients.



**Figure 7.10. Allocations optimales dans le cas de la mesure dite du *Worst Case*.** La mesure choisie ici correspond à une Expected Shortfall de quantile 0.50% par exemple.

Nous avons également étudié plus en détail la question de la diversification des portefeuilles efficients. La Figure 7.11 représente l'indice de Herfindahl  $HI(a) = \left( \sum_{i=1}^{16} a_i^2 \right)^{-1}$  en fonction du rendement moyen exigé : schématiquement, plus cet indice est élevé, plus le portefeuille est diversifié. A première vue, le résultat classique selon lequel plus l'investisseur est prudent (faibles niveaux de rendement), plus son portefeuille est diversifié, semble tenir. Toutefois, il ne semble se vérifier qu'au-dessus d'un certain de niveau de rendement. Ainsi, la forme de bosse constatée dans la Figure 7.11 montre qu'en dessous de ce niveau (dépendant a priori de la mesure de risque), la diversification du portefeuille optimal diminue.



**Figure 7.10. Indice de Hedfindahl des portefeuilles efficaces en fonction du niveau de rendement exigé.** Le graphique représente l'évolution de cet indice de diversification pour différentes mesures de risque.

Cela signifie que pour les contraintes de risque les plus exigeantes, correspondant à la partie gauche de chacune des courbes de diversification, les portefeuilles optimaux se concentrent sur moins de fonds. Les fonds concernés sont en fait ceux qui comportent les caractéristiques les « moins mauvaises ». Par exemple, le fond n°6 (Sage Capital Limited Partnership) est l'un d'eux. Dans le Tableau 7.11, nous avons consigné la proportion de ce fonds dans les portefeuilles efficaces et celle-ci est effectivement croissante à mesure que la contrainte de risque s'intensifie<sup>25</sup>.

Expected Return	0,80%	0,90%	1,00%	1,10%	1,20%	1,30%	1,40%
<b>Standard Deviation</b>	58,33%	51,87%	44,92%	36,29%	27,66%	19,03%	7,87%
<b>Lower Semi-Variance</b>	48,19%	38,80%	29,99%	22,45%	14,40%	6,02%	0,02%
<b>Worst Case Measure</b>	41,62%	41,74%	40,27%	24,42%	19,89%	8,28%	0,00%
<b>Wang Transform</b>	44,25%	44,01%	38,58%	28,48%	17,73%	5,08%	0,00%

**Tableau 7.11. Proportion du fonds n°6 dans les portefeuilles efficaces pour différents niveaux de rendement exigé.** La contrainte de risque la plus intense correspond au niveau de rendement exigé le plus faible (0,80%). La proportion en HF6 est donc effectivement croissante à mesure que la contrainte de risque s'intensifie.

Cette étude sur la diversification met en évidence deux effets contradictoires : d'un côté on vérifie le résultat classique selon lequel l'intensification de la contrainte de risque mène à des portefeuilles efficaces plus diversifiés ; de l'autre, ce résultat peut être contredit par des effets de dépendance de queue positive. Par exemple dans le cas limite où les rendements négatifs extrêmes seraient parfaitement corrélés, le portefeuille optimal pour la mesure de *worst case* consisterait à tout investir sur l'actif dont le pire rendement serait le moins mauvais. Ici par exemple, il s'agit du fonds n°6.

<sup>25</sup> En effet, lorsqu'on diminue le niveau de rendement exigé, cela revient à renforcer davantage la contrainte de risque dans le problème d'optimisation équivalent qu'est la maximisation du rendement sous contrainte de risque.

**Partie III - Couverture des marges nettes de taux  
d'intérêt sur les ressources non échéancées**

## Introduction

Dans cette partie, nous proposons d'étudier le problème de couverture du risque de taux d'intérêt global sur le poste des ressources non échéancées. Comme nous l'avons déjà évoqué en Partie I, celles-ci constituent des encours considérables pour les établissements financiers, une source de revenus particulièrement stable et une source de liquidité à très faible coût.

L'identification du risque de taux d'intérêt sur le poste des ressources non échéancées est un sujet conséquent, en soi. Il est relativement clair que cette activité dégage des revenus sensibles aux taux de marché, par le biais du remplacement des encours sur les marchés obligataires. Toutefois, nous verrons dans cette partie qu'il est possible de dénicher la présence du risque de taux au sein des encours même ou d'éventuels taux de rémunération de la clientèle. Pour ce dernier point, il suffit de prendre l'exemple français pour constater que les taux de rémunération de produits très courants (livret A, livret développement durable, etc.) sont régis par une formule faisant intervenir des taux de marché. Dans cette partie, nous proposons à cette occasion un premier chapitre consacré à l'étude de l'offre actuelle en termes de ressources échéancées et de taux de rémunération, sur différents marchés.

Pour ce qui est des encours, le risque de taux peut par exemple provenir d'effet d'arbitrage de la part de la clientèle entre certains comptes pas ou peu rémunérés et d'autres qui le sont. Les taux interviennent sans doute dans cette « fonction d'arbitrage » mais de quelle manière ? La question de la *quantification* se pose donc autant que celle de l'*identification*, d'autant que les revenus dégagés sur ces ressources n'ont aucune raison d'être pleinement contingentes à des facteurs de marché. En effet, il paraît un peu rapide d'imaginer que les réactions d'une clientèle sont dictées par les seuls mouvements des taux d'intérêt. C'est pourquoi nous proposons ici de tenir compte de l'existence de sources de risque orthogonales, que la banque ne peut a priori pas « couvrir » à l'aide d'instruments de marché.

Ceci nous permet d'en venir à la question de la couverture. Une des questions qui se pose au sein des ALM bancaires est celle des quantités à couvrir sur le poste des ressources non échéancées : *marges* ou *valeur* ? En effet, l'environnement comptable, s'il permet de bien distinguer les deux notions comme nous l'avons montré en Partie I, ne permet pas encore de trancher sur la question en ce qui concerne les dépôts à vue ou les comptes d'épargne, sans échéance contractuelle ; nous aurons l'occasion de revenir sur ce point dans cette partie. Néanmoins, la pratique bancaire, du fait de la mission de pilotage de résultat de l'ALM, va, au premier ordre, à la stabilisation des flux de trésorerie futurs, c'est-à-dire des marges.

Ainsi, dans le troisième et dernier chapitre de cette partie, nous proposons de développer un modèle de couverture du risque de taux sur les marges nettes d'intérêt, en tenant compte des faits précités : effets d'arbitrage induisant des mouvements d'encours avec les taux de marché, dépendance de la rémunération aux taux et cadre de marché incomplet dû au fait que la contingence des marges nettes de taux d'intérêt va en général au-delà des seuls facteurs de marché.

Cette partie s'articule donc comme suit. Dans le Chapitre 8 nous effectuons une revue de l'offre en termes de ressources non échéancées sur différents marchés. Nous citons notamment le cas des Etats-Unis, de la Zone Euro et de quelques pays émergents, cibles privilégiées des banques de détail des établissements occidentaux. Dans le Chapitre 9, nous proposons de revenir sur l'influence du comportement de la clientèle et des enjeux de sa bonne compréhension dans la façon d'appréhender la modélisation sur le poste des ressources

non échéancées. Nous y discuterons en particulier de la prévision des encours futurs sur la base d'un échéancier de liquidité, incluant notamment la prise en compte et la quantification des clôtures de comptes. Dans le Chapitre 10, comme nous venons de l'évoquer, nous développons un modèle de couverture des marges dégagées sur le poste des ressources non échéancées.

## Chapitre 8. Dépôts et comptes d'épargne – Une revue des offres à travers le monde

### 1. Caractéristiques

#### a. Les agrégats monétaires

Nous donnons ici la définition énoncée par la Banque Centrale Européenne. Notons par exemple que les banques centrales nationales s'y réfèrent directement pour définir la notion d'agrégat monétaire.

**Définition de la Banque Centrale Européenne.** *Currency in circulation plus outstanding amounts of certain liabilities of monetary financial institutions (MFIs) that have a relatively high degree of liquidity and are held by non-MFI euro area residents outside the central government sector.*

La définition des agrégats monétaires dépend du marché local et des produits proposés, c'est-à-dire qu'il existe en particulier une interaction entre l'élaboration de ces indicateurs et l'offre proposée par les établissements bancaires et les institutions financières du pays considéré. Classés en général de M0 à M3, ils sont inclus les uns dans les autres et sont définis de la manière suivante :

**M0** : Pièces et billets en circulation ;

**M1** : **M0** + dépôts à vue ;

**M2** : **M1** + dépôts à terme de maturité inférieure à un certain seuil (en général, 2 ans) et dépôts à « faible » délai de préavis ;

**M3** : **M2** + autres placements monétaires (OPCVM, pensions, instruments de marché monétaire et titres de créance à « faible » maturité, etc.).

Les placements non monétaires comme les dépôts à terme de maturité supérieure au seuil défini pour M2 ou les titres de créance de maturité trop longue pour être incluse dans M3 ne sont pas pris en compte dans ces agrégats. Le tableau 9.1 montre la définition et quelques statistiques sur les agrégats monétaires dans la zone Euro et en France

Agrégats monétaires	ZONE EURO			France				
	Encours à fin décembre 2006 (en milliards d'euros)	Taux de croissance (en % annuel)			Encours à fin décembre 2006 (en milliards d'euros)	Taux de croissance (en % annuel)		
		2004	2005	2006		2004	2005	2006
Billets et pièces en circulation	579,0	17,0	13,8	11,0				
Dépôts à vue	3095,1	7,5	10,9	6,74	448,4	5,8	10,9	5,2
<b>= M1</b>	<b>3674,1</b>	<b>8,9</b>	<b>11,3</b>	<b>7,4</b>				
+ autres dépôts monétaires (M2 – M1)	2953,9	4,3	5,4	11,74	497,1	5,5	5,3	7,9
<b>= M2</b>	<b>6628,0</b>	<b>6,6</b>	<b>8,5</b>	<b>9,3</b>				
+ Instruments négociables (M3 – M2)	1079,0	6,2	0,8	11,54	470,3	12,0	6,8	10,4
<b>= M3</b>	<b>7718,7</b>	<b>6,6</b>	<b>7,3</b>	<b>9,7</b>				
<b>Contribution française à M3 (hors billets)</b>					<b>1432,0</b>	<b>7,6</b>	<b>8,2</b>	<b>10,3</b>
<b>Crédits au secteur privé (brut)</b>	<b>9160,1</b>	<b>7,2</b>	<b>9,2</b>	<b>10,7</b>	<b>1 542,7</b>	<b>8,4</b>	<b>9,0</b>	<b>11,4</b>
dont : Crédits aux SNF	3846,7	5,4	8,3	13,0	630,4	6,0	7,2	9,3
dont : Crédits à la consommation des ménages	586,8	5,7	7,9	7,81	144,9	4,4	6,8	4,3
dont : Crédits à l'habitat des ménages	3209,6	10,1	11,5	9,55	577,8	12,2	14,8	15,0

**Tableau 9.1. Agrégats monétaires et taux de croissance sur la zone Euro et la France.** Le tableau donne l'encours (en milliards d'euros) des agrégats monétaires et de leurs principaux composants, pour la zone Euro et l'exemple de la France. Il en indique également le taux de croissance annuel entre 2004 et 2006.

L'état et la définition de ces grandeurs monétaires sont du ressort des banques centrales. Dans le cas de la zone Euro, la Banque Centrale Européenne détient des données agrégées au niveau de la zone Euro mais chaque banque centrale nationale – Banque de France, *Banca d'Italia*, *Deutsche Bundesbank* – tient à jour des statistiques sur son territoire.

Toutefois, du fait du développement de l'innovation commerciale, la délimitation entre les agrégats monétaires s'avère de plus en plus difficile. En effet, les banques proposent de plus en plus des moyens d'épargne suffisamment liquides associés, avec le développement des portails Internet notamment, à des outils de gestions de plus en plus pratiques pour les clients. Par exemple, en France, le livret bancaire devient un produit quasiment aussi liquide que le dépôt à vue, puisqu'il est possible pour le client d'effectuer des transferts plusieurs fois par jour en se connectant sur un compte personnel disponible sur le portail Internet associé à sa banque.

Egalement, le traitement fiscal des produits diffère d'un type de compte à l'autre. Ainsi, on retrouve parfois dans le même agrégat des composantes à la fiscalité variée. Or a priori, un client a tendance à tenir compte de ce facteur dans l'allocation de son épargne.

## **b. L'offre sur le marché français**

En France, on peut résumer pour l'essentiel les agrégats monétaires de la façon suivante :

**M0** : billets et pièces en circulation

**M1** : **M0** + Dépôts à vue

**M2** : **M1** + Dépôts et comptes d'épargne à court terme

**M3** : **M2** + Instruments négociables et Dépôts et comptes d'épargne à long terme,

où les « dépôts et comptes d'épargne à court terme » sont composés des dépôts à terme de maturité inférieure ou égale à 2 ans et des comptes d'épargne sur livret. Les « instruments négociables » sont composés des titres d'OPCVM monétaires, des pensions et des titres de créance de maturité inférieure ou égale à 2 ans. Les « dépôts et comptes d'épargne à long terme » comprennent par exemple les plans d'épargne logement (PEL), non comptés dans M2.

En revanche, les comptes d'assurance vie n'apparaissent pas dans les agrégats monétaires : ceci est un point important dans la mesure où l'assurance vie constitue un mode d'épargne relativement courant qui fait régulièrement l'objet de campagnes commerciales.

	Encours brut	Taux de croissance annuel brut			Taux de croissance sur 3 mois annualisé		
	août-07	juin-07	juil-07	août-07	juin-07	juil-07	août-07
<b>Contribution française à M3</b>	<b>1 568,9</b>	<b>13,4</b>	<b>13,2</b>	<b>12,4</b>	<b>12,6</b>	<b>13,2</b>	<b>9,1</b>
<b>Engagements monétaires vis-à-vis des résidents français</b>	<b>1 510,9</b>	<b>10,2</b>	<b>10,1</b>	<b>10,4</b>	<b>11,9</b>	<b>10,0</b>	<b>8,0</b>
Dépôts à vue	466,8	6,9	5,8	7,8	17,6	9,7	11,9
Autres dépôts à court terme	529,9	10,8	12,6	12,9	10,0	15,2	13,6
<i>Dépôts à terme &lt; 2 ans</i>	99,6	43,8	59,2	62,3	47,9	87,1	65,5
<i>Comptes sur livret</i>	430,4	5,8	5,6	5,5	3,9	4,2	4,8
Instruments négociables	514,1	13,2	11,9	10,4	8,7	5,2	0,6
<i>Titres d'OPCVM monétaires</i>	369,0	11,8	11,6	9,1	11,3	10,2	0,8
<i>Pensions</i>	48,6	11,8	32,6	26,0	-	42,8	49,5
<i>Titres de créance &lt; 2ans</i>	96,5	19,3	3,7	8,7	5,8	24,1	20,7
<b>Engagements monétaires nets vis-à-vis du reste de la zone Euro</b>	<b>58,0</b>	<b>3,2</b>	<b>3,1</b>	<b>2,0</b>	<b>0,7</b>	<b>3,1</b>	<b>1,0</b>

**Tableau 9.2. Agrégats monétaires en France.** Le tableau donne l'encours (en milliards d'euros) des différents agrégats monétaires et de leurs composants. Il en indique également le taux de croissance sur l'année écoulée et sur les 3 derniers mois. (Source Banque de France)

En France les dépôts à vue sont en majeure partie non rémunérés. Toutefois cette particularité est censée avoir disparu du fait de l'uniformisation de la réglementation dans la zone Euro puisque les établissements bancaires sont désormais autorisés à rémunérer les comptes à vue en France<sup>26</sup>.

Les comptes d'épargne sur livret se divisent en différents types, dont, pour l'essentiel :

- les *livrets A*, détenus exclusivement<sup>27</sup> par la Banque Postale, les Caisses d'Epargne et le Crédit Mutuel, qui sont rémunérés sur la base d'un taux défini depuis août 2004 par

$$\tau_{\text{LIVA}} = \frac{1}{2}(\text{Inflation} + \text{Eur3M}) + 0.25\% \quad \text{où l'inflation est donnée par l'accroissement de}$$

<sup>26</sup> Cette règle se matérialise par l'arrêté du 16 mars 2005 sous le mandat d'Hervé Gaymard, alors ministre de l'Economie. Cette mesure fait suite aux affaires Barclays au début des années 90 et Caixa Bank (2002), deux établissements ayant tenté d'introduire la rémunération des comptes à vue sur le territoire français.

<sup>27</sup> Cette règle devrait prendre fin le 1<sup>er</sup> janvier 2009. Un communiqué de presse ministériel du 17 décembre 2007 évoque la fin du monopole de la Banque Postale, des Caisses d'Epargne et du Crédit Mutuel sur le livret A en France. Il y est dit que cette mesure devrait « s'inscrire dans le cadre de la loi de modernisation de l'économie qui sera présentée au Parlement au premier semestre 2008. ».

l'indice des prix (hors tabac) par rapport à la même date il y a un an ; d'un point de vue fiscal, les intérêts du Livret A sont exonérés d'impôts ;

- les livrets bleus, ou *livrets B*, ersatz du livret A, proposés par les banques et institutions financières en général, rémunérés à un taux égal à celui du livret A diminué de 25 points de base, à savoir  $\tau_{\text{LivB}} = \frac{1}{2}(\text{Inflation} + \text{Eur3M})$  ; contrairement au livret A, les intérêts du livret B sont soumis à l'impôt sur le revenu.
- les *comptes d'épargne logement* (CEL), proposés par tous les établissements financiers en général, dont le mode de fonctionnement repose sur un dépôt d'une durée de 18 mois minimum à l'issue de laquelle il est possible de bénéficier d'un prêt immobilier à taux préférentiel dont le montant est fonction des intérêts accumulés. Le compte est plafonné (actuellement à 15 300 euros) et le taux de rémunération est égal à 2/3 du taux du livret A, c'est-à-dire  $\tau_{\text{CEL}} = \frac{1}{3}(\text{Inflation} + \text{Eur3M}) + 0.17\%$  ; les intérêts sont exonérés d'impôts ;
- les *livrets développement durable* (LDD, ex-CODEVI), comptes d'épargne classiques plafonnés (actuellement à 6 000 euros depuis janvier 2007) rémunérés de manière défiscalisée (tant pour l'impôt sur le revenu que pour les prélèvements sociaux) à un taux égal à celui du livret A,  $\tau_{\text{LDD}} = \frac{1}{2}(\text{Inflation} + \text{Eur3M}) + 0.25\%$  ;
- les *livrets d'épargne populaire* (LEP) destinés aux personnes fiscales non imposables, plafonné (7 700 euros en janvier 2008), rémunéré au taux du livret A augmenté de 1%,  $\tau_{\text{LEP}} = \frac{1}{2}(\text{Inflation} + \text{Eur3M}) + 1.25\%$ , fiscalité nulle (pas de prélèvements sociaux ni d'impôt sur le revenu) ;
- d'autres livrets : livrets jeunes et livrets spécifiques à chaque établissement.

Le tableau 9.3 ci-après donne des ordres de grandeur quant au volume de ces différents comptes d'épargne au niveau national.

	Livrets A	Livrets B	CEL	LDD ex-CODEVI	LEP	Livrets Jeunes	Livrets soumis à l'impôt	Total	
								Encours	Taux de croissance annuel
<b>2003</b>	112,2	15,5	36,0	43,2	53,8	5,7	85,3	<b>351,8</b>	<b>10,0</b>
<b>2004</b>	113,5	16,3	38,5	45,7	56,7	6,1	100,7	<b>377,5</b>	<b>7,3</b>
<b>2005</b>	112,1	16,9	39,1	47,0	56,8	6,4	114,2	<b>392,6</b>	<b>4,0</b>
<b>2006</b>	113,7	18,3	38,2	54,6	57,4	6,6	126,2	<b>415,0</b>	<b>5,7</b>

**Tableau 3. Court historique de l'encours total par type de livret en France.** Les encours sont donnés en milliards d'euros, le taux de croissance en % annuels. On note la prépondérance des livrets A, distribués exclusivement par la Banque Postale et les Caisses d'Epargne. C'est un sujet important pour les banques, qui vont devoir se partager cet encours dès le 1<sup>er</sup> janvier 2009 et la fin du monopole sur le Livret A. (Source : Banque de France)

Les dépôts à terme de maturité inférieure ou égale à 2 ans comprennent entre autres les bons de caisse et d'épargne, les titres de créances négociables, les comptes à terme et certains plans d'épargne logement (PEL) et plans d'épargne populaire (PEP) bancaires respectant la condition de maturité. Les PEL et PEP bancaires dont l'horizon dépasse les 2 ans ne sont par exemple pas pris en compte dans M2, mais dans M3. D'ailleurs, les PEP sont des produits actuellement en voie de disparition en France.

Les comptes à terme comportent pour l'essentiel une condition de montant minimal et une maturité à déterminer. Le taux de rémunération est déterminé en fonction du montant investi et de la maturité du dépôt : plus le niveau d'épargne et la durée du contrat sont élevés, plus la rémunération, mesurée par une décote par rapport au taux de marché de référence, est importante. Classiquement, cette décote va de l'ordre de 10bp à 2% et le taux de marché de référence est un taux Euribor de court terme (1 mois, 3 mois). Enfin, du point de vue fiscal, les intérêts sont soumis aux prélèvements sociaux et à l'impôt sur le revenu.

Les bons de caisse et d'épargne sont d'autres sortes de comptes à terme, portant une fiscalité très rigoureuse (taux d'imposition de l'ordre de 70%). Les titres de créances négociables comportent pour leur part des montants minimaux d'investissement relativement élevés (de l'ordre de 150 000 euros).

#### **d. L'offre sur le marché américain**

Le marché américain constitue un exemple comparable à la France du fait de la multiplicité des solutions d'épargne : comptes à vue, comptes d'épargne, fonds mutuels de détail, dépôts à terme, plans de retraite, etc. L'offre proposée par les banques est définie par les réglementations dites *Regulation Q* et *Regulation D*.

Le texte *Regulation Q*, créé en 1930 à l'initiative du Congrès, définissait alors l'essentiel des pratiques bancaires. Avec l'apparition des fonds mutuels (*money market mutual funds*) et avec la disparition des plafonds sur les taux de rémunération (*Depository Institutions Deregulation Act*) entre 1980 et 1986, la plupart des fonds furent transférés en direction des comptes dont la définition est assurée par le texte *Regulation D* (*NOW, ATS, time deposits, savings*, cf. ci-dessous). A l'heure actuelle, le texte *Regulation Q* est relativement court et ne comporte que quelques définitions.

Une des principales différences entre la France et les Etats-Unis réside donc en particulier dans la déréglementation des taux de rémunération sur l'offre bancaire d'épargne.

Ainsi, le marché américain définit également des agrégats monétaires sur une base comparable à celle de la Banque Centrale Européenne. Par exemple les agrégats M1 et M2 sont posés ainsi :

- **M1** = Monnaie en circulation (**M0**) + *travelers checks* non émis par des banques + dépôts à vue (*demand deposits*) dans les banques commerciales<sup>28</sup> + *other checkable deposits*<sup>29</sup>;
- **M2** = **M1** + comptes d'épargne (*savings deposits*) dont MMDA (*money market deposit accounts*) + dépôts à terme de faible nominal<sup>30</sup> hors pensions IRA (i.e. *Individual Retirement Account*) et plans *Keogh*<sup>31</sup> + bilan des fonds mutuels de détail (*retail money market mutual funds*) ;

---

<sup>28</sup> La dénomination « banques commerciales » exclut en particulier l'État américain, les banques étrangères et les institutions officielles.

<sup>29</sup> Ces comptes regroupent principalement les *Negotiable Orders of Withdrawal* (NOW) et les comptes *Automated Transfer Service* (ATS). Un NOW est un compte rémunéré duquel on peut effectuer des transferts en direction de tiers, sur rédaction d'un « ordre de retrait ». Un ATS est un compte rémunéré sur lequel on peut mettre en place des transferts automatiques en direction d'un compte chèque afin par exemple de couvrir l'émission d'un chèque ou de maintenir un niveau minimal. La plupart des banques françaises proposent les deux types de dispositifs, moyennant une commission, sur les comptes à vue.

<sup>30</sup> Un « faible nominal » fait référence à un montant inférieur à \$100,000.

<sup>31</sup> Le plan Keogh est un fonds de pension destiné aux professions libérales.

- **M3 = M2** + dépôts à terme de fort nominal + contrats de rachat des institutions de dépôt (*repurchase agreements*) + dépôts en Eurodollar + bilan des fonds mutuels institutionnels (*institutional money market mutual funds*).

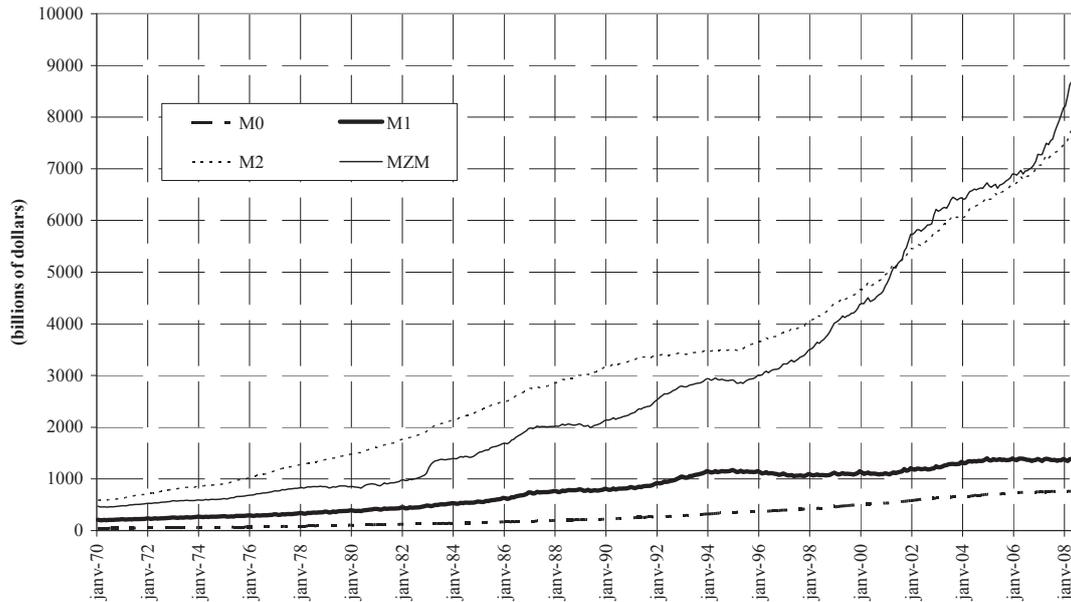
L'agrégat MZM (*money zero maturity*), défini par Motley (1988) puis Poole (1991) et adopté par la Fed, s'identifie à M2 auquel on aurait ôté ses dépôts à terme de faible nominal et ajouté les fonds mutuels institutionnels (aux fonds mutuels de détail). Nous détaillons ci-dessus le contenu de chaque agrégat monétaire. L'avantage de cet agrégat est de caractériser les comptes par leur liquidité (fluidité des transferts de fonds) plutôt que par la clientèle qu'ils concernent. En effet, sur ce dernier point, un client aisé disposant d'une épargne sur fonds mutuels d'un nominal supérieur à \$50,000 sera classé « fonds mutuel institutionnel », non compté dans M2, alors que la fluidité de l'épargne est la même que sur un fonds mutuel *retail*.

Les dépôts à vue, comme en France, ne sont pas rémunérés, mais les *other checkable deposits* qui composent M1, eux, le sont, à un taux qui est donc fixé par chaque établissement. Le tableau 9.4 ci-après résume la composition de M1 aux Etats-Unis en encours, afin de peser l'importance de chacun des composants de cet agrégat.

<i>(in billions of dollars)</i>		January 1980	January 1990	January 2000	January 2008
<b>M0</b>	Currency	105,1	222,5	523,6	755,4
<b>M1-M0</b>	Traveler's Checks Outstanding	3,4	6,6	8,4	6,2
	Demand Deposits	264,3	282,1	349,3	290,3
	Other Checkable Deposits	17,6	289,4	245,5	312,1
	<b>Total M1</b>	<b>390,4</b>	<b>800,6</b>	<b>1126,8</b>	<b>1364</b>
<b>M2-M1</b>	Savings Deposits	415,1	897,3	1734,6	3878,3
	Small Denomination Time Deposits	240,6	536,7	644,6	823,5
	Retail Mutual Money Funds	36,6	325,6	843,1	997,6
	<b>Total M2</b>	<b>1082,7</b>	<b>2560,2</b>	<b>4349,1</b>	<b>7063,4</b>
<b>Some M3 elements</b>	Institutional Mutual Money Funds	10,6	116,2	690,5	1974,7
	IRA and Keogh Accounts	19,2	281,5	377,3	583,7
	Large Denomination Time Deposits	227,1	525,5	762,3	N/A

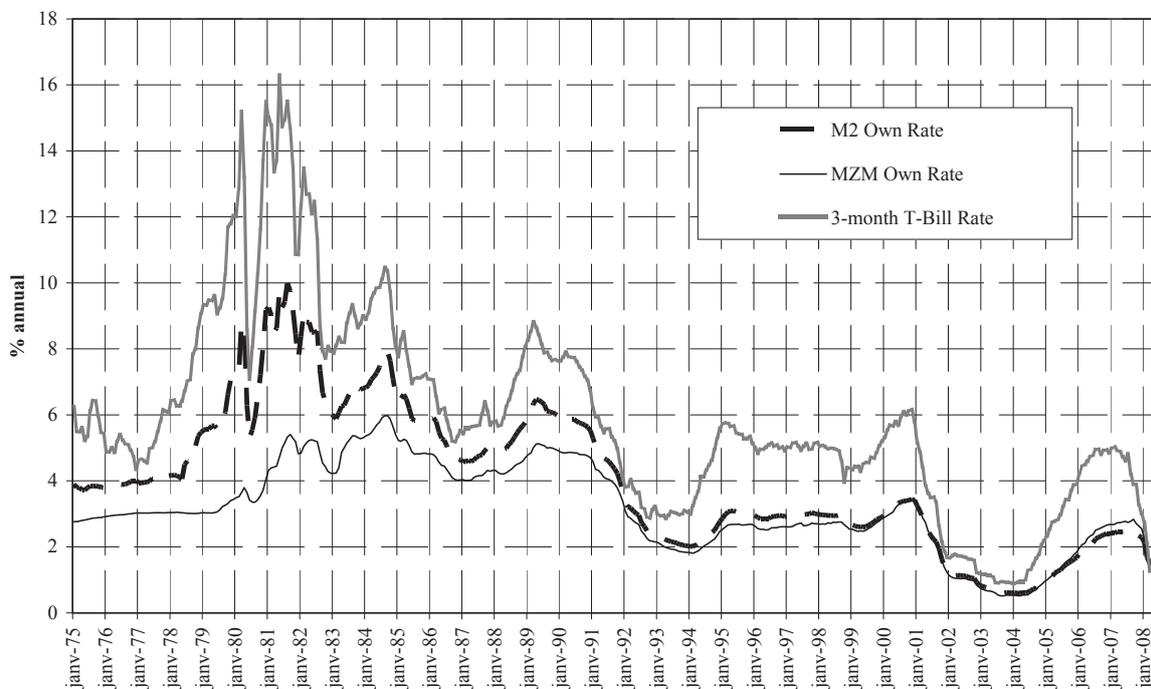
**Tableau 9.4. Composition des différents agrégats monétaires aux Etats-Unis.** La date de janvier 1980 se situe juste avant le *Dereglementation Act*, dont l'effet se terminera en mars 1986. Cela permet d'en apprécier, en janvier 1990, les conséquences sur les encours de dépôts NOW + ATS (*other checkable deposits*), des fonds mutuels (*retail and institutional money funds*) et des fonds de pension (IRA et Keogh).

L'agrégat M2 comporte des comptes d'épargne regroupés sous la dénomination de *savings*, des dépôts à terme de faible nominal, c'est-à-dire de nominal inférieur ou égal à 100 000 \$, et des fonds mutuels de détail (*retail money funds*). Ces derniers se différencient des fonds mutuels institutionnels (*institutional money funds* - spécifiques à M3) par leur nominal ; ainsi on regroupe dans les fonds mutuels de détail ceux dont le nominal est inférieur ou égal à 50 000 \$. Les fonds de pension IRA et *Keogh* sont également exclus de cet agrégat.



**Graphique 9.5. Historique d'agrégats monétaires aux Etats-Unis.** Source US Federal Reserve.

Le taux de rémunération des comptes d'épargne (*savings*) dépend du produit considéré, qui varie d'une banque à l'autre. C'est pour cette raison que la Fed s'intéresse à la grandeur *M2 own rate* qui se calcule comme le taux moyen des ressources de M2 pondéré par les encours. On peut naturellement étendre cette notion à l'agrégat MZM.



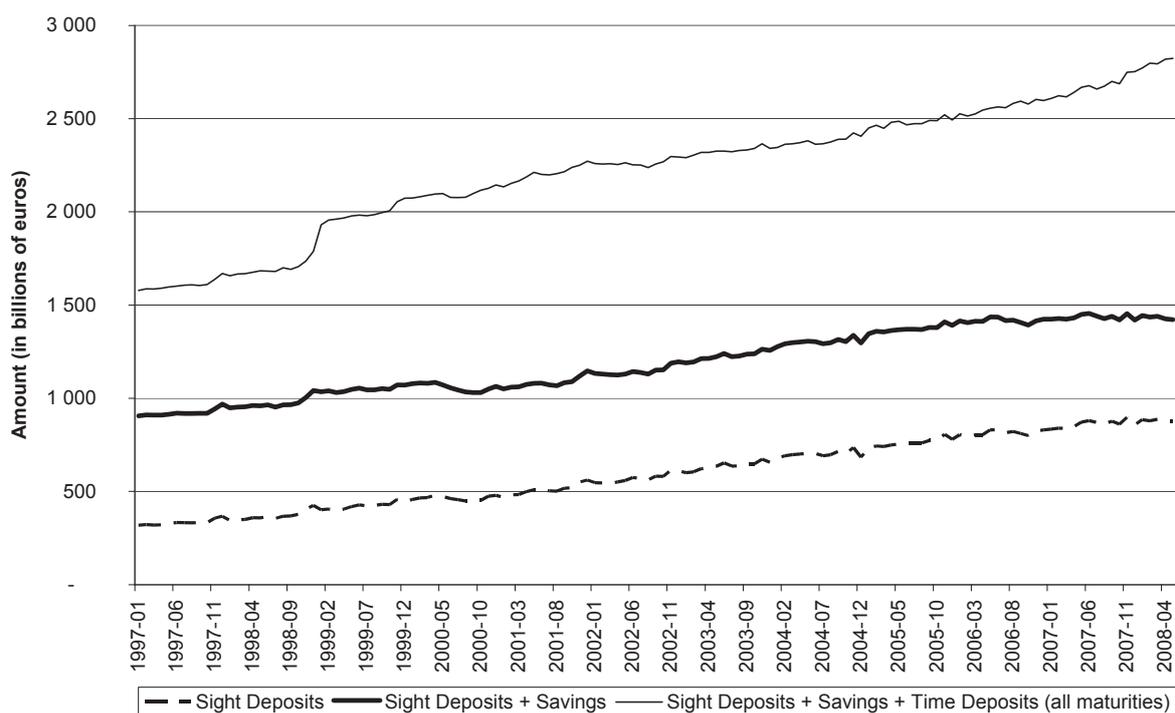
**Graphique 9.6. Taux moyens d'agrégats monétaires (M2 Own Rate / MZM Own Rate) et Taux Etat 3 mois (3-month Treasury bill rate).**

On note une très forte similitude de tendance entre taux de rémunération moyens et taux état de court terme (et de long terme, même si nous ne l'avons pas fait figurer ici). C'est un point que nous reprendrons plus loin dans cette partie, à propos de la modélisation du taux de rémunération.

### e. Autres exemples de marchés européens - le marché allemand et le marché italien

De même qu'en France et aux Etats-Unis, les marchés allemand et italien regroupent les différents types de dépôts en agrégats monétaires et leur classement dans les agrégats s'effectue en fonction de leur horizon de placement. Plus précisément, d'une manière générale, dans ces deux marchés représentatifs de la zone Euro, on retrouve les dépôts à vue (M1), les comptes d'épargne, les dépôts à terme de maturité inférieure ou égale à 2 ans (M2), les dépôts à terme de plus longue maturité et les contrats de repo (M3).

Ainsi, dans le marché allemand, on trouve des dépôts à vue (*girokonto*), des comptes d'épargne (*sparkonto*) et des dépôts à terme. Les comptes sont rémunérés, y compris les dépôts à vue, à un taux fixé par chaque établissement et selon la maturité du dépôt. La *Deutsche Bundesbank* publie des statistiques historiques sur ces taux par tranche de maturité et selon la date d'ouverture des comptes. Ainsi le graphique 9.7 représente l'évolution des encours de différents types de dépôts des ménages depuis 1997.



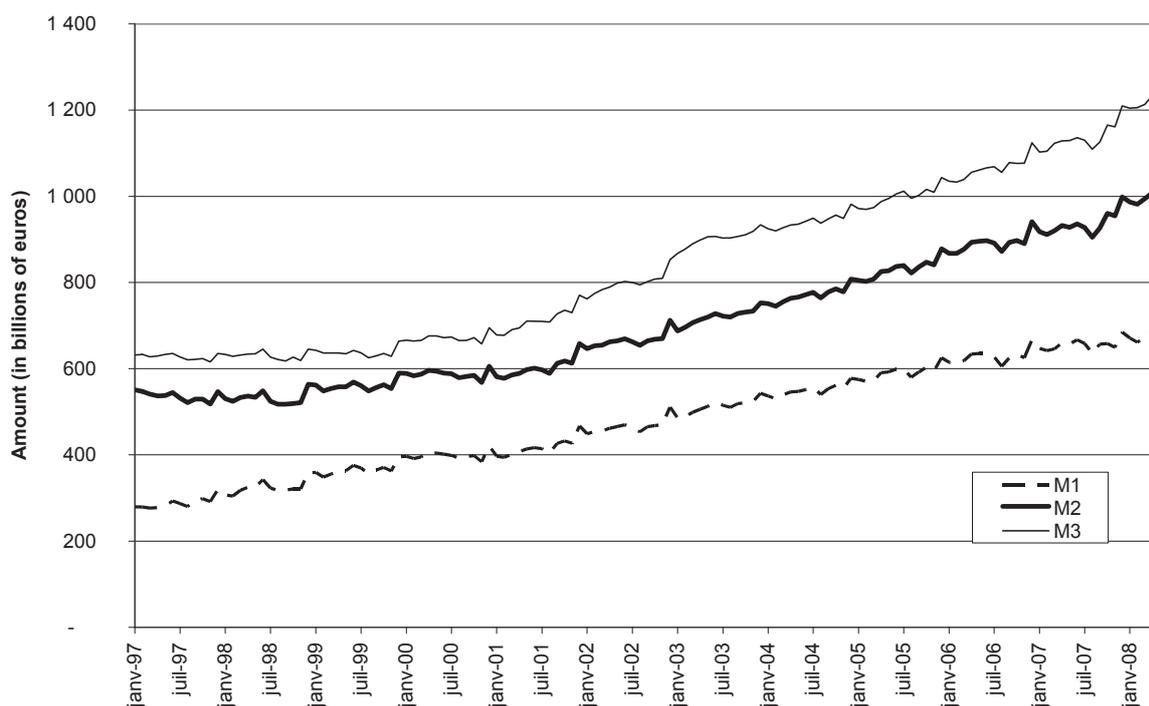
**Graphique 9.7. Encours de dépôts (dépôts à vue, comptes d'épargne et dépôts à terme) en Allemagne (à gauche).** Les données sur les dépôts à terme incluent toutes les maturités. (Source *Deutsche Bundesbank*).

En Italie, les comptes courants sont également rémunérés sur la base d'un taux défini de manière non standard. En effet, il existe un grand nombre (une centaine !) de « conventions » de rémunération attribuées suivant des critères variés, comme la situation familiale, la catégorie socio-professionnelle, etc. A ces comptes « conventionnés », il faut ajouter des

comptes dits « ordinaires » qui sont en fait rémunérés sur la base d'un taux défini après négociation avec le client.

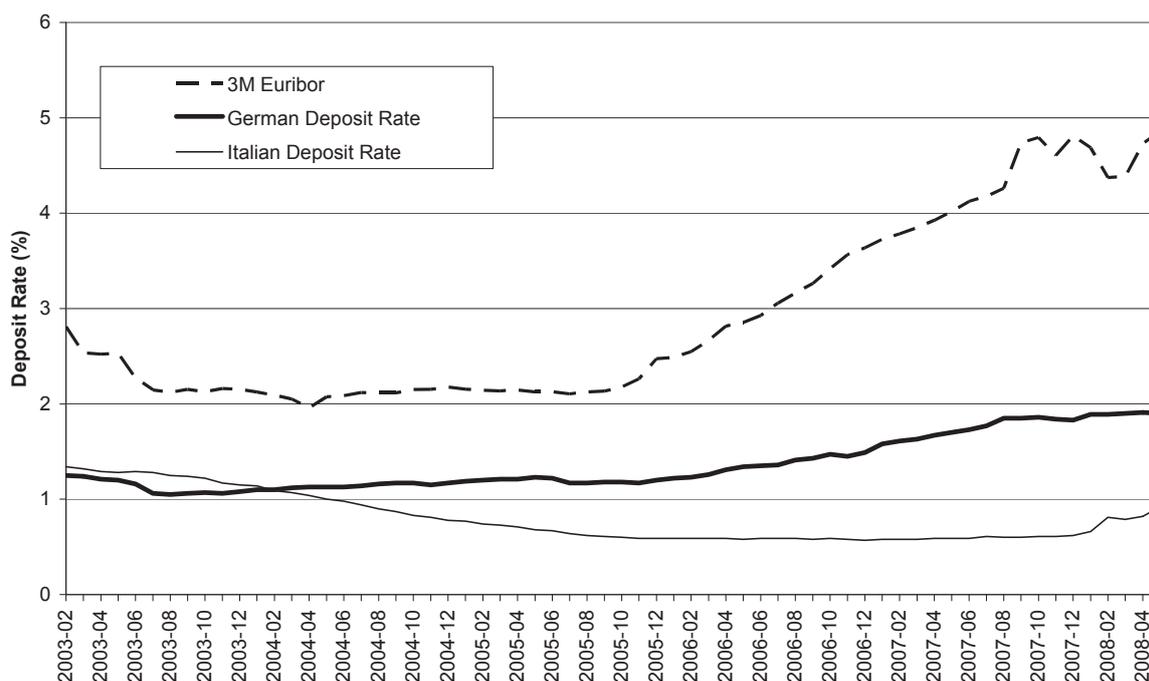
Dans la pratique, les comptes « conventionnés » constituent une très forte majorité des comptes de la banque de détail, des administrations publiques et de la clientèle privée. Les comptes dits « ordinaires » constituent eux l'essentiel des comptes détenus par les grandes entreprises. Enfin, sur le marché des PME, on enregistre les deux types de comptes dans des proportions à peu près égales.

Le graphique 9.8 représente l'évolution historique de différents agrégats monétaires en Italie depuis 1997.



**Graphique 9.8. Encours des agrégats M1, M2 et M3 italiens (historique).** (Source Banca d'Italia)

La complexité du système d'attribution des taux de rémunération, en Allemagne et davantage encore en Italie, place leur modélisation et leur suivi dans un cadre très similaire à celui des Etats-Unis. Ainsi on dispose plus volontiers du taux moyen par agrégat monétaire, pondéré par les encours. Nous verrons plus loin que la modélisation de ce taux va passer par des modèles d'équilibre sur l'offre et la demande de monnaie sur le marché des dépôts ou par inférence statistique sur des paramètres de marché et économiques. Le graphique 9.9 représente l'évolution historique des taux de rémunération des dépôts à vue en Italie et en Allemagne.



**Graphique 9.9. Taux de rémunération des dépôts à vue Italiens et Allemands (historique).** Il s'agit des taux moyens de rémunération des dépôts à vue des ménages dans les établissements bancaires de toutes sortes, pour chacun des pays. (Sources *Banca d'Italia* et *Deutsche Bundesbank*)

## f. Les marchés émergents

Les marchés émergents intéressent de plus en plus les grands établissements bancaires qui souhaitent effectuer des rapprochements avec des banques de ces régions. Citons, en ce qui concerne les banques françaises, les acquisitions récentes de TEB Mali (Turquie) en 2005 et d'UkrSibBank (Ukraine) en 2006 par BNP Paribas, ainsi que de RosBank, fin 2007, par la Société Générale.

Certaines banques sont historiquement dotées de filiales dans des pays émergents : ainsi, le Crédit Agricole (Crédit du Maroc), la Société Générale (Société Générale Marocaine de Banques) et BNP Paribas (Banque Marocaine du Commerce et de l'Industrie) sont depuis longtemps implantés au Maroc<sup>32</sup>. Dans ce cas ou dans le cas d'une nouvelle acquisition, le statut de marché émergent comporte des spécificités que l'ALM doit prendre en compte dans son appréhension locale de la gestion des ressources.

Ainsi, le remplacement ou l'obtention de capitaux n'est pas forcément aussi facile que dans la zone Euro, aux USA ou au Japon, tous dotés d'un marché interbancaire liquide et de marchés financiers matures. Un corollaire de cela est que la diversité de produits dérivés disponibles n'est pas aussi importante, ou bien moyennant des coûts de liquidité supérieurs. Il faut également prendre en compte des conditions économiques parfois bien particulières (taux élevés en Turquie, etc.).

<sup>32</sup> Le Crédit du Maroc, filiale historique du Crédit Lyonnais créée en 1919, rejoint le groupe Crédit Agricole – Crédit Lyonnais lors de la fusion, en 2003. BNP Paribas acquiert la BMCI en 1964 et la Société Générale possède la SGMB depuis sa création en 1913.

Dans cette dernière sous-section, nous proposons de revenir sur deux types de marchés émergents : d'une part le marché marocain, sur lequel nous disions que nombre de banques étaient déjà implantées, et d'autre part les marchés turc et ukrainien, deux exemples de marchés où les grandes banques des pays développés ont procédé très récemment à des acquisitions. Dans les deux cas, on remarque que le développement des ressources de la clientèle est aussi rapide qu'il est récent, ce qui impose aux banques de bien quantifier les incertitudes en prévision sur les encours alors que les marges d'intermédiation possèdent un très fort potentiel.

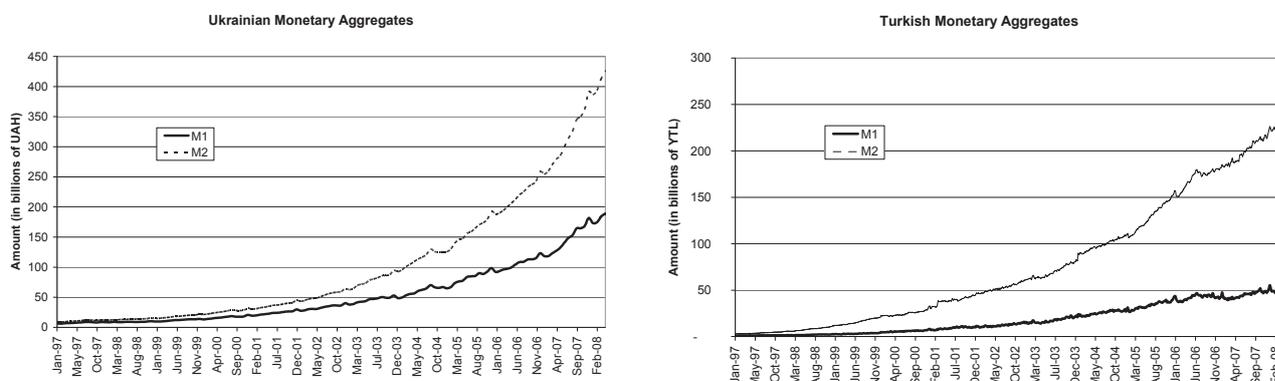
### *i. Le cas du Maroc*

Il existe au Maroc un marché obligataire assez peu développé, avec des obligations d'Etat. Mais il n'y a pas de marché interbancaire permettant une circulation de la liquidité aussi facile qu'en Europe ou aux Etats-Unis. Le placement des dépôts s'effectue donc sur les actifs de la banque (crédits à la clientèle) ou sur des obligations *corporate*, dont le niveau est fixé par l'Etat. L'autre particularité du Maroc vient de sa devise, le dirham marocain (MAD), dont la circulation n'est autorisée qu'à l'intérieur des frontières. Le dirham n'est donc pas exportable. En revanche, l'offre proposée par les banques se rapproche de ce qui se pratique en France. En effet, la plupart des banques marocaines proposent à leurs clients :

- comptes sur carnet : analogues des comptes sur livret français, rémunérés à un taux fixé par l'établissement, et plafonnés ;
- comptes à terme d'échéance 3, 6 ou 9 mois généralement, rémunérés suivant un « taux en vigueur » ;
- des investissements en bons du trésor (« bons de caisse »), d'échéance 3, 6 ou 9 mois ;
- des contrats d'assurance vie, des solutions en gestion d'actifs, etc.

### *ii. Les cas turc et ukrainien*

Les marchés turc et ukrainien sont deux exemples de marchés émergents où la présence des grandes banques occidentales est plus récente. Comme le montre le graphique 9.10 ci-après, les encours de ressources suivent une tendance à la hausse, qu'on pourrait qualifier d'explosive. Or les dépôts de la clientèle constituent pour les établissements de ces marchés une source de liquidité à moindre coût, et c'est un facteur déterminant, dans des pays où le risque de liquidité est la première préoccupation des banques.



**Graphique 9.10. Agrégats monétaires M1 et M2 en Ukraine (à gauche) et en Turquie (à droite).** Les données sont issues des Banques Centrales de chaque pays ; les encours sont en milliards de *hrivnias* (1 EUR = 7,59 UAH) pour

l'Ukraine et en milliards de nouvelles livres turques (1 EUR = 1,89 YTL) pour la Turquie (ces taux de change sont ceux de fin Juillet 2008).

D'autre part, même si les encours de ressources varient fortement à la hausse, il s'avère que les stocks ainsi créés ont un comportement relativement stable, dans le sens où sur les historiques disponibles, certes courts, le taux de clôture et l'évolution des encours par compte permettent d'anticiper une durée de vie du stock plutôt longue. Nous aurons l'occasion de revenir un peu plus loin sur ces questions.

C'est une propriété plutôt agréable par rapport aux problèmes de coût et de risque liés à la liquidité. Les ressources restent ainsi disponibles sur le long terme, permettant de financer à moindre coût les activités de crédit et l'actif en général, tout en assurant une certaine marge de manœuvre par rapport aux éventuels chocs de liquidité.

## **2. Les enjeux de la modélisation des ressources non échéancées**

### **a. Indicateurs utilisés en ALM**

L'objectif touche ici à l'amélioration de la gestion des comptes de ressources de la clientèle détaillés ci-dessus. Comme nous le disions dans la première partie de cette thèse, la pratique de l'ALM s'appuie en grande partie sur les indicateurs et procédures suivants :

- *l'impasse de liquidité* : il s'agit de la prévision de l'écoulement futur des ressources (dépôts, créances diverses) ôtées des emplois (crédits), mais on peut également proposer un écoulement en liquidité des ressources clientèle seules que la prévision du niveau d'encours futur permet de calculer ;
- *l'impasse de taux* : il s'agit de la sensibilité du bilan aux variations des taux d'intérêts de différentes maturités, à chaque date future ; ainsi il existe théoriquement autant d'impasses que de taux de référence ; en décrivant l'encours futur par son niveau et sa dépendance à un taux de marché on peut calculer une sensibilité des marges nettes d'intérêt aux taux ;
- *des analyses par scénarios de crise (stress testing)* : en poussant les facteurs explicatifs les paramètres d'un modèle à des valeurs extrêmes, on obtient des simulations de crise de la variable principale.

D'un point de vue opérationnel, comme nous l'avons évoqué, une grande partie de la mission de l'ALM est le pilotage du résultat, qui consiste à assurer une stabilité du résultat généré par le bilan bancaire. Le principal moyen d'action dans ce but est ainsi d'élaborer des stratégies de couverture : à travers l'impasse de taux, l'identification de facteurs sous-jacents (taux, inflation) et le calcul de sensibilités par rapport à ces facteurs permet de déterminer des montants de produits dérivés adéquat (dérivés de taux d'intérêt, dérivés inflation, produits structurés) afin de neutraliser tout ou partie du risque associé, conformément à l'objectif de risque/rendement défini au niveau du groupe.

L'impasse de liquidité ajoute à cette mission en proposant une connaissance de la disponibilité de la liquidité à différents termes et donne une idée des coûts à consentir sur cette partie. Lorsque cette impasse concerne un type de produit particulier, elle sert également à donner un ordre de grandeur des marges futures dégagées sur ce produit : par exemple, dans le cas des dépôts à vue non rémunérés, dans l'hypothèse où les encours futurs sont supposés

indépendants des taux, l'échéancier de liquidité coïncide avec la sensibilité des marges au niveau des taux courts. Cette propriété tombe en fait dans la plupart des cas, puisqu'elle n'est plus valable dès qu'on introduit une rémunération ou des encours futurs sensibles aux taux de marché. Ainsi l'impasse de liquidité joue un rôle plus important dans les indicateurs de risque que dans la mission de pilotage de résultat.

Enfin, l'analyse par scénarios de crise, au niveau gestion, permet d'appréhender le comportement du *Banking Book* dans des cas de figure extrêmes (crise du marché des taux, crise de liquidité, crise pétrolière, grippe aviaire, etc.). Nous avons vu en première partie que le stress testing répondait à la fois à une exigence réglementaire et à un processus interne de *reporting* en gestion des risques. Dans le pilotage de résultat, l'analyse par scénarios de crise permet de vérifier que les stratégies de gestion ne chamboulent pas le comportement du *Banking Book* dans des scénarios extrêmes.

Théoriquement, il faudrait alors intégrer des conditions limites par rapport à des scénarios de crise dans le programme de détermination des stratégies de gestion optimales. Néanmoins, nous allons dans cette partie nous concentrer sur la gestion du risque de taux sans affecter de pondération particulière à d'éventuels scénarios de crise.

## **b. Marge et Valeur – Pilotage du résultat**

Ainsi, la feuille de route de l'ALM ne se limite pas à un seul chiffre, disons à la seule chronique des résultats et de leurs sensibilités à divers facteurs. L'ALM est en effet dotée d'outils et de systèmes informatiques dont le but est de fournir un compte-rendu quantitatif détaillé de la situation du *Banking Book* et des stratégies de couverture associées. Ainsi, on parle à la fois de Valeur Actuelle Nette et de suivi du Résultat Net de la banque à chaque date future.

En ce qui concerne les conventions de Résultat ou de Valeur il faut tenir compte d'une multitude de points de vue, chacun impliquant des contraintes et des exigences vis-à-vis de l'ALM : le point de vue comptable, le reporting interne, le régulateur, le marché, l'actionnaire, entre autres. D'une manière générale, le Comité de Bâle et les recommandations des régulateurs locaux s'occupent de la partie réglementaire. Ainsi le passage aux nouvelles normes IAS / IFRS pour ce qui est de la sphère comptable a imposé aux banques d'importants changements dans les référentiels comptables, changeant le mode de *reporting* des établissements, donc la vision du marché sur ceux-ci. Or tous ces organes exigent directement ou indirectement de la banque des comptes sur la valeur ou la marge suivant les postes / activités, c'est selon.

La Valeur Actuelle Nette (VAN) représente la somme actualisée des flux futurs pour le périmètre concerné. Elle figure en comptabilité dans les normes de comptabilisation des produits « à la juste valeur ». Sa vocation ne se limite cependant pas à sa seule utilisation dans les processus comptables puisqu'elle est considérée dans les processus de fusion / acquisition comme un indicateur privilégié de la valeur des activités. C'est pourquoi un *reporting* en valeur est bienvenu de la part de l'ALM. Par ailleurs, le calcul d'indicateurs de capital économique pour le régulateur nécessite une approche en valeur car le capital économique est calculé sur la base de la VAN.

Cependant, dans cette troisième partie, nous allons nous intéresser essentiellement au problème de stabilisation du résultat comptable et plus spécifiquement des marges. Pour quelles raisons ? Tout d'abord, le suivi du résultat est une des missions principales de l'ALM.

Par ailleurs, la comptabilisation « en couru » de certains postes du bilan en IAS/IFRS (cf. Partie I de ce rapport) pousse à l'ALM à se munir de stratégies de couverture des risques portés par le résultat comptable. Enfin, il est en effet très important du point de vue du marché d'afficher une certaine maîtrise du niveau de résultat et de sa volatilité. Cet aspect est en tous points positif du point de vue des analystes, du marché et des actionnaires.

Evidemment, l'ALM se doit d'appliquer les deux approches au cas particulier des ressources non échéancées. Toutefois, nous allons nous intéresser ici à la problématique de stabilisation du résultat et de gestion de la transformation (cf. Partie I) qui concerne fortement l'ALM. Dans le cas des ressources non échéancées, le résultat de la banque s'identifie aux marges nettes de taux d'intérêt, c'est-à-dire au revenu issu du différentiel de taux existant entre le versement d'intérêt à la clientèle et le remplacement des ressources à taux de marché. Pour l'ALM, il s'agit d'élaborer des stratégies de transformation visant à assurer un objectif de rendement / risque optimal pour la chronique du résultat de la banque. Qu'est-ce qu'un objectif de rendement / risque optimal ? C'est une question que nous abordons dans cette partie.

### **c. Aspects de la modélisation des ressources non échéancées**

Dans le cadre du suivi des marges nettes de taux d'intérêt, a priori, nous avons besoin de modéliser trois éléments : l'encours de ressources, la rémunération des clients et le remplacement sur les marchés. La marge se définit directement à partir de ces trois grandeurs.

Il existe deux points de vue quant à la prévision de l'encours de ressources. L'approche la plus naturelle consisterait à s'intéresser à une prévision de l'encours total aux dates futures. Cependant, d'une part, une forte incertitude pèse sur ces grandeurs futures et d'autre part, les normes comptables imposent aux établissements de ne pas affecter de valeur, ni de mettre en place d'éventuelles stratégies de gestion par rapport aux productions nouvelles futures. Pour ces raisons, l'ALM s'intéresse principalement à la stabilisation des marges sur la base de l'amortissement du stock. En effet, le stock présent de ressources suit un certain profil d'amortissement, ce qui ne l'empêche pas de générer des marges futures à stabiliser. Nous verrons que ce point de vue est à la base des notions d'échéanciers de liquidité et de taux.

Le taux de rémunération des ressources est une grandeur définie de manière réglementaire ou bien déterminée par la banque. Dans le premier cas, il peut exister des formules d'indexation de ce taux sur des grandeurs économiques, l'exemple le plus représentatif étant celui du taux du Livret B français, calculé par rapport à l'inflation et au taux Euribor 3 mois (cf. plus haut dans ce chapitre). Avant cela, les taux du livret A et du livret B étaient déterminés d'une manière plus opaque par une commission dédiée à cela. Dans un tel cas, la modélisation du taux client est plus difficile. Il en est a priori de même avec un taux fixé à la discrétion de la banque. En effet, ce privilège ne revient en général pas à l'ALM seule et celle-ci doit composer avec celui-ci comme une donnée, au mieux issue d'un processus de négociation, au pire quasiment exogène. Le cas du taux client défini à la discrétion de chaque établissement est en fait le plus courant à l'échelle mondiale (USA, Allemagne, Italie, Russie, Turquie, en fait quasiment le monde entier sauf pour l'instant la France et ses partenaires historiques (Maroc, Algérie, etc.)). Dans ces conditions, c'est en général l'inférence statistique par rapport aux taux de marché qui permet une modélisation des taux client, comme de nombreuses études en proposent (cf. ci-après). Cette approche s'avère relativement gratifiante et on peut en effet imaginer que les banques fixent leurs taux clients en lien avec les taux de marché afin de simplifier leurs problèmes de gestion.

Pour ce qui est du remplacement sur les marchés, le choix « avant couverture » consiste à placer l'encours de ressources à un taux de marché court. Plus loin, nous montrerons que des études scientifiques associent à cela une notion d'absence d'opportunité d'arbitrage : en effet, quel autre rendement sans risque peut-on espérer sur un encours de ressources que celui résultant d'un placement à un taux court ? Toute stratégie de couverture consiste à greffer sur le rendement sans risque ainsi dégagé un produit dérivé de nominal équivalent à l'encours placé, afin d'affecter la marge et le résultat en couru.

L'intégration des modélisations que nous venons de décrire permet d'exhiber la dépendance de l'indicateur de marge à des facteurs sous-jacents (principalement, des taux de marché, mais pas uniquement), en d'autres termes de préciser le *profil optionnel* des produits qu'on traite. Ainsi, cela permet de se rapprocher des pratiques de marchés consistant à déterminer des méthodes de gestion des options par rapport à leurs sous-jacents (stratégies de couverture parfaite ou partielle, indicateurs de risque). Prenons l'exemple d'un modèle expliquant l'évolution de l'encours de dépôts d'une banque, faisant intervenir le taux court. L'encours de dépôts à vue à chaque date peut alors être considéré comme une option sur le taux court, liée à un *payoff* à évaluer et à couvrir. C'est un point que nous proposons de traiter d'une manière plus quantitative dans le chapitre 10.

Toutefois, quel que soit le modèle employé, les résultats liés à ce genre d'étude font a fortiori intervenir les paramètres du modèle choisi et posent la question de sa robustesse (risque de modèle). C'est pourquoi une approche pour évaluer ce risque de modèle est le recours au *benchmarking*, consistant en la confrontation de plusieurs classes de modèles de prévision afin de comparer leurs conclusions. En particulier, nous reviendrons plus tard sur des analyses permettant de tester la robustesse des stratégies de couverture aux paramètres du modèle. On peut également comparer les résultats de programmes d'optimisation correspondant à différentes attitudes de gestionnaire, comme nous faisons en partie II de cette thèse à l'aide de différentes mesures de risque. C'est une analyse que nous mènerons également au cours du chapitre 10.

#### **d. Quelques mots sur la disponibilité des données**

Dans la littérature scientifique, nombre d'études économétriques ont pour objectif la détermination des facteurs explicatifs de l'évolution des encours de dépôts et d'épargne. Bien souvent, pour des raisons de confidentialité, ces études ne peuvent pas s'appuyer sur des données d'établissements bancaires. Par conséquent, nombre de publications font référence à des données d'agrégats monétaires, disponibles auprès des banques centrales : *Federal Reserve* (Fed) pour les USA, Banque Centrale Européenne pour la zone Euro, et autres banques nationales. Les sites Internet de ces établissements contiennent par exemple des données sur ces agrégats.

Parfois, la réglementation locale permet de rendre disponibles des données plus précises. L'exemple des USA est significatif sur ce point : la SEC – *Securities and Exchange Commission* – oblige en effet chaque établissement bancaire américain à publier des rapports à fréquence trimestrielle sur leur état financier détaillé. On trouve notamment dans ces rapports – « 10-K » pour les rapports annuels, au 1<sup>er</sup> janvier de chaque année, et « 10-Q » pour les rapports intermédiaires – un suivi du bilan détaillé de la banque ainsi que des indicateurs de revenus (marge nette d'intérêt, commissions, frais de gestion, etc.) et de sensibilité aux taux. Les données indiquées dans l'Annexe D proviennent d'une collecte effectuée dans les rapports de la SEC.

### 3. Une courte revue de la littérature

#### *Modélisation de l'encours de dépôts*

Depuis le début des années 1990, on trouve un certain nombre de travaux sur l'évaluation et la gestion des risques des ressources non échéancées, associant généralement des études économétriques sur les agrégats monétaires et les historiques d'encours de dépôts. Les modèles développés portent à la fois sur la dynamique de l'encours et sur leurs facteurs explicatifs.

Les modèles économétriques sur les encours de dépôts développés dans Selvaggio (1996), Jarrow, Janosi et Zullo (1999), O'Brien (2000) ont le point commun de relier le taux de croissance des dépôts  $\ln D(t) - \ln D(t-1)$  au taux court  $r(t)$  afin de représenter la réaction de l'encours au mouvement des taux :

$$\ln(D(t)) - \ln(D(t-1)) = \alpha + \beta r(t) + \gamma(r(t) - r(t-1)) + \varepsilon(t).$$

Dans O'Brien (2000), la sensibilité de la croissance de l'encours à la variation des taux est supposée différente dans le cas où les taux augmentent ou baissent. Il existe également des approches par équilibre comme dans Hutchison (1995) puis Hutchison et Pennacchi (1996), écrivant l'encours de dépôts comme une donnée résultant d'un équilibre entre taux de marché  $r(t)$ , taux de rémunération  $r_d(t)$  et frais de fonctionnement  $c(t)$  de l'activité d'intermédiation. Toutefois, la forme de l'encours comme supposée dans Hutchison et Pennacchi (1996) se rapproche des modèles précités :  $D(t) = (k_1 r(t) + k_2 r_d(t) + \eta(t))e^{\mu t}$ .

#### *Marge ou valeur ?*

Le travail de Jarrow et van Deventer (1998) reste celui qui a eu le plus grand impact sur la question de la valorisation des dépôts à vue, la prévision de l'encours de ressources, etc. Ainsi la plupart des logiciels d'ALM employés dans les banques (QRM, IPS-Sendero, Fermat, etc.) y font référence.

Les auteurs s'intéressent au problème de la *valorisation* d'un poste de dépôts au sein d'une banque. Pour cela, ils développent une méthode basée sur l'actualisation des flux futurs, issus d'une part du remplacement des ressources à taux de marché et d'autre part du paiement d'un taux d'intérêt à la clientèle. Dans ce modèle, la valeur  $V_D(0)$  des dépôts se comporte comme un actif contingent aux taux de marché :

$$V_D(0) = \mathbf{E} \left[ \int_0^T D(t) \frac{r(t) - r_d(t)}{B(t)} dt \right],$$

où  $r(t)$  est le taux court,  $r_d(t)$  le taux client,  $B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right)$  le facteur d'actualisation stochastique usuel et  $D(t)$  l'encours de dépôts à la date  $t$ .

La valeur correspondrait donc au *prix* d'un swap de taux entre taux court et taux client, de nominal variable égal à l'encours de dépôts. Nous parlons ici de prix car dans Jarrow et van Deventer (1998), le calcul d'espérance est effectué à l'aide d'une mesure de probabilité risque-neutre. Or il n'est pas si évident de penser que d'une part, les dépôts à vue constituent un produit négociable sur un marché structuré, et d'autre part que ceux-ci se « valorisent » suivant une probabilité « risque neutre » liée aux *seuls* taux de marché, même si on y identifie

une option de taux, comme nous l'évoquions plus haut. Sur ce dernier point, supposer la seule contingence de l'encours de dépôts aux taux de marché peut sembler discutable, étant donné l'importance de la politique commerciale, du comportement clientèle, et autres facteurs a priori détachés des taux de marché.

Un article postérieur, celui de Janosi, Jarrow et Zullo (1999), apporte une étude empirique de ce modèle et des estimations de ses paramètres. Les données utilisées s'appuient sur des encours d'établissements bancaires sur différents types de comptes (*demand deposit, MMDA, NOW*).

On retrouve la même approche de valorisation dans de nombreux travaux, avec quelques déclinaisons. Ainsi O'Brien (2000) valorise les dépôts avec le même principe, mais à l'aide d'un modèle économétrique sur les encours appréhendant différemment l'influence des taux de marché suivant qu'ils sont à la hausse ou à la baisse et Kalkbrener et Willing (2004) calculent également une *fair value* des dépôts à l'aide d'un modèle de taux de type Heath-Jarrow-Morton. Plus récemment, les travaux d'Elkenbracht et Nauta (2006) développent des calculs de sensibilités de la valeur des dépôts dans le modèle de Jarrow et van Deventer. Enfin, ce même modèle a des implications jusqu'au niveau réglementaire puisque la méthode de *Portfolio Management* développée par l'Office of Thrift Supervision américain (2000) s'en inspire de très près.

Antérieurement à Jarrow et van Deventer (1998), Hutchison et Pennacchi (1996) avaient déjà pensé à une méthode d'évaluation des dépôts à vue sous la forme de somme actualisée des flux générés, sous probabilité risque-neutre :

$$V_D(t) = \int_t^{+\infty} P(t,s) \mathbf{E}^s [MNI_s] ds ,$$

où  $MNI_s$  désigne la marge nette de taux d'intérêt dégagee à chaque date future  $s$ . Ici, on notera qu'on considère l'espérance sous probabilité *s-forward-neutre* ( $\mathbf{E}^s$ ) à chaque date  $s$ , pour chacune des marges et les prix d'obligations zéro coupon  $P(t,s)$  correspondants<sup>33</sup>. Hutchison et Pennacchi proposent d'appréhender la sensibilité de la valeur par l'indicateur de durée de Cox, Ingersoll et Ross (1979), c'est-à-dire la maturité  $T^*$  d'un zéro coupon affichant la même durée que la valeur  $V_D(t)$  :

$$\frac{1}{P(t,T^*)} \frac{\partial P(t,T^*)}{\partial r(t)} = - \frac{1}{V_D(t)} \frac{\partial V_D(t)}{\partial r(t)} .$$

Tous ces travaux concernent en fait le calcul de la valeur des dépôts et proposent des stratégies de couverture du risque de taux associé sur la base de leur sensibilité. Peu d'articles abordent ce problème de couverture sur les marges de taux d'intérêt. Pourtant, les travaux d'English (2002), à l'initiative du BIS (*Bank for International Settlement*), démontrent qu'à l'échelle de la planète, les banques ont particulièrement concentré leurs efforts sur la gestion du risque de taux d'intérêt des marges. Par ailleurs, les travaux de Ho et Saunders (1981), repris par Maudos et Fernandez de Guevara (2004) pour des établissements de l'Union Européenne, démontrent que les déterminants des marges d'intérêt des banques vont au-delà d'une simple contingence aux taux, intégrant le risque régulateur (cf. aussi Saunders et

<sup>33</sup> La formule est ici parfaitement équivalente à celle de Jarrow et van Deventer, mais elle est peut-être plus facilement utilisable d'un point de vue opérationnel étant donné que les prix de zéro coupon sont directement récupérables. De plus, l'utilisation de facteurs de décompte stochastiques dans la formule de Jarrow et van Deventer peut contraindre le modélisateur à procéder par Monte-Carlo pour effectuer la valorisation.

Schumacher (2000), plus récemment), le degré d'exposition au risque de crédit de la banque (cf. aussi Wong (1997)), et un risque de business dépendant des conditions concurrentielles.

#### *Modélisation du taux client*

Il existe principalement deux approches dans la modélisation client : l'approche d'inférence statistique et l'approche d'équilibre.

Dans Jarrow et van Deventer (1998), puis dans Janosi, Jarrow et Zullo (1999), c'est la première qui est privilégiée. En effet, l'hypothèse de diffusion des taux client met en évidence une relation affine de court terme avec le taux court  $r(t)$ , dont les paramètres sont ensuite estimés de manière économétrique. Cette relation prend la forme suivante :

$$dr_d(t) = [\beta_0 + \beta_1 r(t)]dt + \beta_2 dr(t).$$

L'idée existe également dans Selvaggio (1996), O'Brien (2000), Kalkbrener et Willing (2004).

L'approche par équilibre, présentée dans Hutchison (1995) et rappelée dans Hutchison et Pennacchi (1996), consiste à déterminer le taux de rémunération des ressources comme une grandeur résultant d'un équilibre concurrentiel entre les établissements bancaires. Ainsi, on trouve un lien entre le taux court, le taux de rémunération et l'élasticité de l'encours de dépôts à ce dernier taux<sup>34</sup>. En supposant que cette élasticité est une fonction affine du taux de marché (cf. Hutchison (1995)), on obtient une expression affine pour le taux de rémunération  $r_d(t)$ .

Le point nouveau dans cette relation d'équilibre est d'introduire une contingence dans le taux client allant au-delà des seuls taux de marché, comme c'est le cas dans le modèle de Jarrow et van Deventer (1998), ce qui se répercute sur les marges nettes de taux d'intérêt. Nous aurons l'occasion de revenir sur cette possibilité lors du Chapitre 10.

---

<sup>34</sup> Cela résulte de la résolution du programme de détermination du taux de rémunération par maximisation du flux de trésorerie correspondant :  $\max_{r_d(t)} D(t)(r(t) - r_d(t) - c(t))$  où  $c(t)$  désigne l'ensemble des frais de gestion à consentir, ôtés des commissions perçues, car ces éléments sont aussi pris en compte dans le modèle d'Hutchison et Pennacchi (1996).

## Chapitre 9. Modélisation de l'écoulement des ressources non échéancées – Une appréhension du comportement de la clientèle

### 1. Objectifs du modèle – Rappel sur les notions d'échéanciers.

Le modèle que nous présentons ici propose de détailler le profil d'amortissement de ressources sans échéance contractuelle en séparant l'évolution du nombre de clients de la banque de l'encours moyen par compte. La notion d'échéancier est une notion très répandue en ALM ; elle est par exemple précisée dans Demey, Frachot et Riboulet (2003), et nous en rappelons les différents aspects ici. Comme évoqué au chapitre précédent, on distingue principalement échéancier de liquidité et échéancier de taux.

#### a. Echéancier de liquidité

Prenons par exemple le cas des dépôts à vue. A la date  $t = 0$ , la banque possède un encours de dépôts  $D(0)$ , le *stock*, correspondant à un certain nombre de clients. Ce stock évolue par la suite et atteint  $\theta$  au bout d'un horizon de temps fini. La fonction donnant le stock à chaque date en proportion de l'encours initial  $D(0)$  est appelée *fonction d'écoulement en liquidité* de l'encours de dépôts à vue.

#### b. Echéancier de taux

Cet échéancier est également défini dans Demey, Frachot et Riboulet (2003). L'échéancier de taux représente à chaque date  $t$  le montant de ressources qu'il faut investir au taux court à cette date afin d'immuniser la marge nette d'intérêt à  $t$  au mouvement de ce taux court. Remarquons immédiatement que la notion d'échéancier de taux est liée au taux court puisqu'il correspond à la donnée de la sensibilité de la marge nette de taux d'intérêt *sur le stock* au taux court à chaque date future.

Plus exactement, dans la pratique, l'échéancier de taux correspond à la fonction donnant la sensibilité de l'*espérance t-forward-neutre* de la marge nette de taux d'intérêt à la date  $t$  au niveau du taux court *forward* à  $t$ . On peut expliquer cette définition en rappelant la formule de valorisation développée dans Hutchison et Pennacchi (1996) et en l'adaptant au cas d'un échéancier (cf. chapitre précédent) :

$$V_D(0) = \int_0^{+\infty} P(0,t) \mathbf{E}^t [MNI(0,t)] dt,$$

où  $MNI(0,t)$  désigne la marge d'intérêt que dégage l'état en  $t$  du stock actuel (en  $\theta$ ). Ainsi, en notant, comme il est courant de le faire, le taux court *forward* (vu d'aujourd'hui) à la date  $t$  par  $f(0,t)$ , l'échéancier de taux correspond à la fonction suivante :

$$t \mapsto \frac{\partial \mathbf{E}^t [MNI(0,t)]}{\partial f(0,t)}.$$

Reprenons un exemple que nous évoquons plus haut, correspondant au cas des dépôts à vue en France. A priori, si on fait l'hypothèse d'indépendance de l'encours de dépôts aux taux courts, les dépôts étant non-rémunérés, la marge nette de taux d'intérêt sur le stock à chaque date est donnée par  $D(t)r_t$  si  $r_t$  est le taux court à la date  $t$ , ce qui, en espérance *t-forward-neutre*, donne  $D(t)f(0,t)$ . Ainsi, la sensibilité de la marge à chaque date future est donnée par

$D(t)$ . Dans ce cas simple, l'échéancier de taux est alors égal à l'échéancier de liquidité. D'une manière générale, on peut alors en déduire que lorsque l'encours du stock et la rémunération sont indépendants des taux, les échéanciers de taux et de liquidité coïncident.

### c. Objectif du chapitre

Le principe du chapitre est de décomposer l'encours d'un stock de ressources sans échéance contractuelle comme produit du nombre de clients par l'encours moyen par compte, pour chaque génération de comptes. Ainsi, nous séparons, dans le mécanisme d'écoulement, les effets de clôture et d'évolution de l'encours moyen par compte.

Plus précisément, notre but est :

- d'obtenir des méthodes d'estimation et des ordres de grandeur sur le taux de clôture parmi les comptes ;
- d'examiner l'évolution de l'encours moyen afin d'appréhender un peu mieux une partie de ce qu'on appelle le risque de *business*, au moins sur la partie liée au comportement de la clientèle.

Ainsi on parvient à démontrer que la durée de vie de beaucoup de types de ressources est relativement longue ; ainsi, il est souvent rassurant pour le gestionnaire de constater que celles-ci constituent un matelas de liquidité confortable sur un terme relativement long, utilisable comme source de financement.

La notion de risque de *business*, que nous évoquions déjà en Partie I de cette thèse, correspond à toute forme de fluctuation sur l'encours de ressources qui n'est pas explicable par des données de marché (en particulier les taux) : citons par exemple le risque lié aux mouvements de la concurrence ou de la clientèle et le risque lié à l'évolution de la réglementation sur l'activité commerciale. Nous distinguons le risque de *business* de la composante relative au risque de marché au sein des dépôts et nous verrons dans la partie suivante que la présence de ces deux sources de risque place le problème de couverture des marges liées aux dépôts à l'aide de produits dérivés de taux, dans un cadre de marché incomplet.

Il arrive de constater des clôtures de comptes contingentes à des facteurs de marché : en cas de hausse des taux, par exemple, il est possible que les clients transfèrent leurs fonds de leurs dépôts à vue, voire même en les fermant, au profit de comptes d'épargne alors mieux rémunérés.

Dans le cas français, le dépôt à vue reste un produit standard sur lequel sont domiciliés de nombreux prélèvements. Ainsi, malgré l'absence actuelle de rémunérations sur ces comptes, on peut supposer que leur clôture n'est pas le fait d'arbitrages par rapport à des facteurs de marché mais s'apparente davantage à du risque de *business* (offre concurrentielle, déménagement, changement de réglementation / fiscalité, etc.). Sa fermeture intervient donc rarement à cause de conditions de marché spécifiquement. Cela dit, on devrait tout de même constater une forte baisse des encours, due à des transferts de liquidité en direction de comptes d'épargne rémunérés ou d'autres placements (dépôts à terme, placements monétaires, etc.).

Signalons enfin que le risque de business ne se manifeste pas qu'au travers de la clientèle, il peut aussi correspondre à des changements de politique commerciale, à des opérations de croissance externe (fusion / acquisition), etc.

#### **d. Contexte – Définition des périmètres**

Jusqu'à présent, nous avons évoqué les ressources non échéancées en général. Nous allons continuer à travailler sur cette notion, en nous plaçant dans le cadre d'un établissement bancaire. Comme indiqué au paragraphe précédent, notre étude pourrait s'appliquer par exemple à la gestion de dépôts à vue non rémunérés (cas de la France) et de comptes d'épargne liquides dotés d'un taux de rémunération (livrets B en France, comptes courants italiens ou allemands, *checkable deposits* aux USA, parmi les exemples que nous avons cités au chapitre précédent).

En fonction de l'existence ou non de taux de rémunération sur les comptes, des caractéristiques de ceux-ci et des opportunités pour la clientèle de transférer sa liquidité vers d'autres types de comptes, les effets observés et modélisés ne sont pas les mêmes. Par exemple, pour les dépôts à vue non-rémunérés en France, on peut plus raisonnablement supposer l'indépendance du phénomène de clôture par rapport aux paramètres de marché alors qu'aux USA, les *checkable deposits*, du fait de l'existence de comptes équivalents (*sight deposits*) et d'ATS (*Automatic Transfer Systems*) s'exposent a priori à ce phénomène.

Ainsi nous considérons un type de ressource sans échéance, qui s'adresse à une clientèle segmentée en plusieurs catégories (particuliers, professionnels, entreprises, banque privée, etc.), et potentiellement rémunérée.

## **2. Le taux de clôture en nombre de comptes.**

La mesure du taux de clôture constitue pour l'établissement un indicateur de comportement de la clientèle. Elle explique en effet la part de l'échéancement des ressources qui correspond à la clôture des contrats pour des causes diverses (départ pour la concurrence, déménagement, etc.).

Cette mesure n'est néanmoins possible qu'à condition de posséder des bases de données adaptées. C'est l'objet de la section 2.a où nous présentons les différents types de bases de données disponibles. Nous développons en section 2.b quelques estimateurs relativement immédiats du taux de clôture et en section 2.c, un estimateur du maximum de vraisemblance basé sur une transposition du modèle de crédit dit « Bâle II » au cas des clôtures de dépôts. Pour terminer, nous discutons de la modélisation de l'évolution de l'encours moyen par compte en section 2.d et de la prévision de l'écoulement du stock et de la gestion des incertitudes en section 2.e.

### **a. Bases de données**

Les bases de données mises à disposition par les services informatiques actuellement sont de deux types. Depuis quelques années nous disposons de bases de données dites « par génération » et très récemment, des bases de données « unitaires » (compte par compte) deviennent disponible. L'objet de cette section est de décrire ces deux types de bases.

Les bases de données « par génération » décrivent, par mois d'ouverture du compte, par devise et par catégorie clientèle, l'encours, le nombre de contrats et parfois le taux de

rémunération moyen<sup>35</sup>, à chaque date de vie du compte. Notons que par « catégorie clientèle », nous entendons essentiellement une des trois catégories suivantes : particuliers (*retail*), professionnels (*business*) et entreprises (*corporate*).

Selon le modèle commercial, il arrive que chaque catégorie soit divisée en « segments de clientèle » : par exemple, la catégorie des particuliers peut être divisée selon le niveau de flux moyens mensuels constatés, suivant que le client est par ailleurs en charge d'un crédit immobilier, suivant qu'il s'agisse d'un étudiant, etc. La plupart des banques françaises sont ainsi dotées d'un tel modèle de segmentation de la clientèle. Cependant, dans l'estimation, une prise en compte de cette segmentation oblige à bonne appréhension des effets de transition entre les segments, avec le temps.

Nous supposons ici que le pas de temps, aussi bien pour le descriptif par année d'ouverture que pour les dates d'observation du parc de comptes, est mensuel. Il arrive que ce ne soit pas le cas et cela induit des ajustements quant aux estimateurs. La Figure 9.1 ci-dessous propose un aperçu de l'aspect d'une telle base de données.

Date d'ouverture	Catégorie Clientèle	Devise	janv-05		févr-05		mars-05	
			Encours	Nombre	Encours	Nombre	Encours	Nombre
août-82	Particuliers	EUR	135 250	255	136 480	241	135 131	236
sept-82	Professionnels	EUR	485 023	182	483 027	181	472 193	174
oct-82	Particuliers	EUR	215 421	312	215 936	305	205 463	296
nov-82	Entreprises	USD	312 540	83	316 440	81	327 253	77
déc-82	Entreprises	EUR	1 476 280	101	1 485 346	100	1 481 357	100

**Figure 9.1. Aperçu d'une base de données « par génération ».** Chaque couple de colonnes correspond à une date d'observation du parc de comptes (base de données fictive).

Les bases de données « unitaires » décrivent compte par compte les caractéristiques du contrat (numéro du compte, devise, catégorie et segment clientèle, date d'ouverture du compte, encours) et ce, à plusieurs dates. Par rapport aux bases « par génération », il devient par exemple possible de mener des études plus précises quant à la répartition des encours au sein de chaque « génération » de comptes et d'établir des « sous-portefeuilles » de clients selon un éventail de critères plus large. De telles bases de données commencent à être disponibles au niveau ALM, avec l'augmentation de la puissance et de la capacité de stockage des systèmes d'information.

Par ailleurs, on peut sentir que ce progrès devrait poser des questions d'organisation des systèmes d'information, quant à la mise à disposition et à l'actualisation des données auprès de l'ALM. Le problème se pose d'autant plus pour des filiales éloignées physiquement de l'ALM centrale et pour la mise en place dans les filiales nouvellement acquises.

## **b. Premiers estimateurs du taux de clôture**

Nous proposons ici quelques estimateurs du taux de clôture qu'on peut calculer sur des bases par génération, donc a fortiori sur des bases unitaires.

<sup>35</sup> Le taux de rémunération moyen correspond à une moyenne pondérée des taux de rémunération par les encours.

### *Hypothèses*

Notre première discussion porte sur les notions d'ancienneté et de génération de comptes : la notion de génération est liée uniquement à une date d'ouverture alors que l'ancienneté dépend en fait à la fois de la date d'ouverture et de la date d'observation. En effet, à mesure qu'on avance dans l'historique, l'ancienneté des comptes d'une génération donnée évolue. Dans notre modèle, par rapport à ce souci de génération / ancienneté, **nous considérons que le taux de clôture ne dépend que de l'ancienneté du compte**. C'est une hypothèse qui vise à prendre en compte les disparités de comportement entre les clients récents et les clients plus anciens : on note en général un taux de clôture par compte plus faible pour ces derniers, un effet révélateur de la mise en place d'une vraie relation entre la banque et le client.

Sous cette hypothèse, le sujet consiste en une étude du taux de clôture au sein de chaque portefeuille de clients, déterminé par un critère d'ancienneté, en plus d'autres caractéristiques propres (catégorie clientèle, devise, etc.). Etant donné le critère d'ancienneté, chaque portefeuille ainsi créé a donc une composition variable dans le temps.

En particulier, comme nous l'évoquions en introduction de cette partie, **nous ne supposons aucune influence des taux d'intérêts sur les taux de clôture**. Cependant, dans le cas de dépôts rémunérés (USA, Italie) ou dans le cas de comptes d'épargne (Livrets B français), la question mérite d'être revue. En effet, un client « arbitragiste », réactif aux conditions de marché et très enclin à transférer sa liquidité d'un compte à l'autre en fonction des taux de rémunération, pourrait tout à fait clôturer complètement son livret au profit d'un dépôt à terme si les conditions de taux s'y prêtaient.

### *Notations*

$T$  : nombre d'observations (numérotées de 0 à  $T$ ) ;

$K$  : ancienneté maximale des comptes (numérotée de 0 à  $K$ ) ;

$N_i(t)$  : nombre de comptes d'ancienneté  $i \in \{0, \dots, K\}$  présents à la date  $t \in [0, T]$  ;

$NC_i(t)$  : nombre de clôtures constatées parmi les comptes d'ancienneté  $i$  présents à la date  $t$ , par rapport à la date précédente ;

$TC_i$  : taux de clôture (en pourcentage du nombre de contrats) des comptes d'ancienneté  $i$ .

### *Modèles et estimateurs*

Il existe plusieurs estimateurs pour évaluer ce taux de clôture. Les estimateurs que nous présentons maintenant s'appuient sur deux modèles :

(M1)  $NC_i(t) = TC_i \times N_i(t-1) + \varepsilon_i(t)$  (modèle additif)

ou

(M2)  $\ln\left(1 - \frac{NC_i(t)}{N_i(t-1)}\right) = -TC_i + \varepsilon_i(t)$  (modèle multiplicatif).

Pour l'instant, nous estimons les taux de clôture en les déduisant du passage de la première équation à l'espérance mathématique :

$$TC_i^{M1,1} = \frac{\sum_{t=1}^T NC_i(t)}{\sum_{t=1}^T N_i(t-1)}.$$

Or on pourrait également faire appel à l'estimateur du maximum de vraisemblance du 1<sup>er</sup> modèle, en supposant les résidus  $\varepsilon_i(t)$  i.i.d gaussiens :

$$TC_i^{M1,2} = \frac{\sum_{t=1}^T N_i(t-1)NC_i(t)}{\sum_{t=1}^T (N_i(t-1))^2}.$$

Enfin, l'estimateur du maximum de vraisemblance du modèle (M2) donne, quant à lui :

$$TC_i^{M2} = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \ln \left( 1 - \frac{NC_i(t)}{N_i(t-1)} \right).$$

Les estimateurs produisent des résultats relativement proches. Le Tableau 9.2 compare des valeurs pour les estimateurs 1 et 3.

	1st Estimator		3rd Estimator	
	Value	Standard Deviation	Value	Standard Deviation
France - Retail Market	5,94%	1,02%	5,51%	1,03%
France - Corporate Market	8,70%	3,81%	10,96%	3,86%
Turkey - Retail Market	19,28%	12,00%	21,19%	14,29%

**Tableau 9.2. Estimations des taux de clôture et écarts types associés.** Les grandeurs sont exprimées en base annuelle.

D'une manière générale, le comportement clientèle est souvent sujet à des phénomènes saisonniers. Les estimateurs 1 et 3 peuvent alors être désaisonnalisés afin de rendre compte du comportement client sur une année entière, en considérant des moyennes glissantes des clôtures et des nombres de comptes sur 12 mois. Cela a pour conséquence de rendre les estimateurs moins volatils. Pour cela, on pose :

$$\begin{cases} NC_i^{SA}(t) = \frac{1}{12} \sum_{s=t-11}^t NC_i(s) \\ N_i^{SA}(t) = \frac{1}{12} \sum_{s=t-11}^t N_i(s) \end{cases}.$$

Cela modifie surtout l'écart type des estimateurs associés, comme le montre le Tableau 9.3.

	1st Estimator		3rd Estimator	
	Value	Standard Deviation	Value	Standard Deviation
France - Retail Market	5,94%	0,11%	5,51%	0,11%
France - Corporate Market	8,70%	0,60%	9,50%	0,62%
Turkey - Retail Market	19,28%	2,23%	20,82%	2,52%

**Tableau 9.3. Estimations des taux de clôture et écarts types associés (2).** L'estimation est cette fois réalisée en calculant un nombre de clôtures et un nombre de comptes associé sur 1 an glissant. Les écarts types sont moins forts que dans le tableau 9.2.

### Prise en compte de l'incertitude

Nous aurons l'occasion de revenir en section 2.e sur les fondements de la prise en compte de l'incertitude dans la gestion des ressources non échancées. Ici, nous nous contentons d'examiner le cas des estimateurs que nous venons de donner.

Afin de mesurer l'incertitude sur ceux-ci, on peut de manière très rudimentaire supposer que les estimateurs précités sont gaussiens et s'appuyer sur leurs deux premiers moments pour connaître leur loi. Ainsi, on en déduit le profil probabiliste des encours futurs de dépôts sur le stock et les indicateurs de valeur, les stratégies de couverture, de remplacement associés. Des tests de Jarque-Bera nous montrent que l'aspect gaussien n'est pas tout à fait usurpé dans certains cas (cf. Tableau 9.4 ci-dessous).

	1st Estimator	3rd Estimator
	P-Value	P-Value
France - Retail Market	59%	58%
France - Corporate Market	5%	5%
Turkey - Retail Market	28%	82%

**Tableau 9.4. P-values du test de normalité de Jarque-Bera.** Les estimateurs dont nous testons la normalité sont ceux du tableau 9.3 c'est-à-dire ceux calculés sur 1 an glissant.

### c. Un estimateur du maximum de vraisemblance du taux de clôture

Nous proposons ici un modèle et l'estimateur correspondant, avec une approche s'inspirant fortement du modèle de crédit proposé par Bâle II.

Ainsi, nous regroupons les clients en « portefeuilles de clients » et modélisons la clôture comme une variable aléatoire de Bernouilli :

$$Z_{i,j} = \mathbf{1}_{\{X_{i,j} \leq s_j\}}(X_{i,j}),$$

où chaque client  $i$  appartient au portefeuille  $j$ . La variable aléatoire latente  $X_{i,j}$  suit une loi normale centrée réduite et le seuil  $s_j$  de déclenchement de la clôture est supposé caractéristique du portefeuille de clients.

La définition de ces portefeuilles est l'analogie de la définition de cohortes homogènes en crédit. Comme dans la section précédente, nous supposons qu'un portefeuille correspond à la donnée d'une ancienneté et d'un ensemble de caractéristiques intrinsèques du compte (devise, catégorie clientèle, etc.). Ainsi, chaque portefeuille de clients a une composition variable dans le temps, mais ceci n'affecte en rien la forme des estimateurs de vraisemblance.

Nous faisons par ailleurs l'hypothèse que les  $X_{i,j}$  se décomposent de la manière suivante :

$$X_{i,j} = \sqrt{\rho_j} \cdot W_j + \sqrt{1 - \rho_j} \cdot \bar{W}_{i,j},$$

où  $0 \leq \rho_j \leq 1$  est un facteur de corrélation lié au portefeuille,  $W_j$  est un facteur « de portefeuille » et  $\bar{W}_{i,j}$  est un facteur spécifique du client. Nous supposons par ailleurs que tous ces facteurs sont deux à deux indépendants. Ainsi, la décomposition énoncée revient à faire

une hypothèse sur la corrélation des événements de clôture au sein d'un même portefeuille de clients.

Techniquement, il faut assortir le modèle d'une hypothèse d'infinie granularité au sein de chaque portefeuille (cf. Chabaane, Chouillou et Laurent (2004) et Chouillou (2005)). Cette condition permet d'assurer que la proportion constatée de défauts au sein du portefeuille à la date  $t$  :

$$TCl_{j,t} = \frac{NC_j(t)}{N_j(t-1)},$$

a une vraisemblance égale à celle de la variable aléatoire :

$$tcl_j = \mathbf{P}(X_{i,j} \leq s_j | W_j),$$

c'est-à-dire :

$$f(tcl_j; s_j, \rho_j) = \sqrt{\frac{1-\rho_j}{\rho_j}} \exp\left(-\frac{s_j^2 + \Phi^{-1}(tcl_j)^2 - 2s_j\sqrt{1-\rho_j}\Phi^{-1}(tcl_j)}{2\rho_j}\right).$$

Si l'hypothèse de granularité n'est pas respectée, il est possible d'effectuer des ajustements (cf. Gordy et Lütkebohmert (2007) par exemple).

On trouve ainsi dans Chouillou (2004) et Düllmann et Scheule (2003) des estimateurs du maximum de vraisemblance de ce modèle :

$$\rho_j^{ml} = \frac{Var(\delta_j)}{1 + Var(\delta_j)} \text{ et } s_j^{ml} = \frac{\delta_j}{\sqrt{1 + Var(\delta_j)}}$$

$$\text{où } \delta_j = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi^{-1}(TCl_{j,t}) \text{ et } Var(\delta_j) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Phi^{-1}(TCl_{j,t})^2 - \delta_j^2.$$

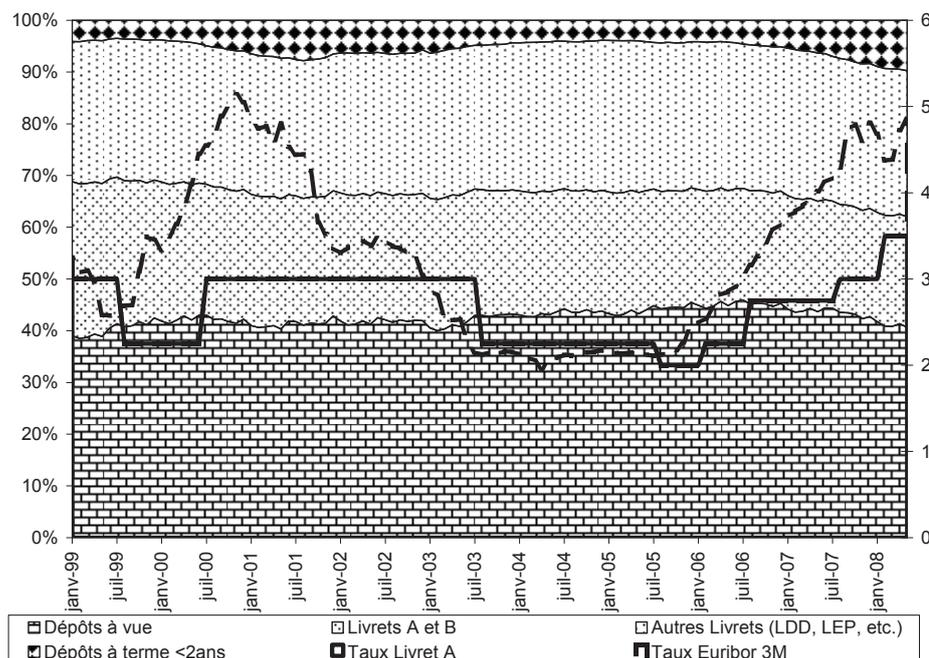
C'est ainsi qu'on peut en déduire une autre estimation du taux de clôture sur chaque portefeuille de clients. Nous nous référons à Düllmann et Scheule (2003) pour les propriétés asymptotiques de ces estimateurs.

#### **d. Modélisation de l'encours moyen par compte**

L'encours moyen par compte est une donnée qui a beaucoup de sens au niveau des entités commerciales. La précision des bases de données actuelles permet de dégager des éléments descriptifs comme l'encours moyen en fonction de l'ancienneté et d'espérer exhiber une dépendance aux taux lorsqu'on dispose d'un historique assez étoffé. En effet, la dépendance de l'encours moyen par compte à l'ancienneté du contrat correspond en grande partie à l'accroissement de la richesse d'un client avec son âge. Au cours de sa vie, son salaire augmente, il constitue une épargne, etc., autant d'effets qui contribuent à l'accroissement de l'encours par compte avec l'ancienneté du client.

En ce qui concerne l'influence des taux de marché, si les phénomènes de clôture peuvent ne porter aucune dépendance aux conditions de taux, supposer la même chose de l'encours moyen par compte peut sembler nettement plus discutable. En France, on imagine que l'encours moyen par compte d'un compte sur livret suit des variations sujettes aux taux de rémunération de ce livret et des alternatives (taux de marché pour les dépôts à terme, taux d'assurance vie, d'épargne logement, etc.). On note en effet une reprise des livrets sur les dépôts à terme au moment où les taux de marché sont descendus en dessous des taux de livret

(début 2003 – mi-2005, cf. figure 9.5 ci-dessous). Ces mouvements constituent des effets d'arbitrage entre comptes d'épargne.



**Figure 9.5. Part des différents types de ressources dans l'épargne liquide totale.** Les couches successives représentent, de bas en haut, les dépôts à vue, les livrets A et B, d'autres livrets (LDD, Livrets d'Épargne Populaire, Comptes Épargne Logement) et les Dépôts à Terme de moins de 2 ans. Ici on représente la part de chaque couche dans le total formé par ces produits et les données concernent les ménages français. Par ailleurs, l'Euribor 3 mois est représenté en pointillés et le taux du livret A en traits pleins (Source : Banque de France).

Par ailleurs, comme nous l'évoquions plus haut, les progrès technologiques et la banque en ligne font que désormais la plupart des comptes sur livret sont devenus aussi liquides et maniables pour le client que leur dépôt à vue. C'est un effet qui joue dans l'arbitrage entre comptes et on note par exemple une tendance descendante de la proportion des dépôts à vue dans l'épargne de la clientèle depuis début 2005 et la quasi-gratuité de la banque en ligne, au profit des autres modes d'épargne (livrets A et B, livrets développement durable et dépôts à terme, principalement).

D'autre part, pour un établissement bancaire, un changement de politique commerciale influe avec la même force sur les encours de ressources. En effet, pour reprendre l'exemple de la France, une banque dégage nettement plus de marge sur un compte sur livret que sur un dépôt à terme. Ainsi, sur le même historique au niveau d'un établissement, on note par exemple un accroissement plus subit de la proportion de l'épargne sur livrets à conditions de taux favorables<sup>36</sup> (début 2003 – mi-2005) que pour les dépôts à terme dans les conditions de taux inverses (fin 2005 jusqu'à aujourd'hui). Cet effet est révélateur d'une politique commerciale de la banque consistant à orienter les clients en direction des comptes sur livret au détriment des dépôts à terme, moins « margés ».

<sup>36</sup> Ici, des conditions de taux favorables pour un compte sur livret correspondent à un taux de rémunération supérieur à celui d'un dépôt à terme, rémunéré à taux de marché (moins une marge fixe de l'ordre de quelques dizaines de points de base).

Enfin, outre les effets d'arbitrage entre ressources, il intervient ce qu'on appelle un « effet richesse » dans l'évolution de l'encours moyen par compte : celui-ci suit également l'accroissement des agrégats monétaires de la zone concernée (cf. Chapitre 8 de cette thèse). Cet effet richesse est plus ou moins intense suivant le pays concerné : les pays émergents affichent un accroissement de la masse de ressources de l'ordre de 30% alors que pour les pays de la Zone Euro ce chiffre se situe aux alentours de 5%.

Tous ces éléments constituent autant de contributions à incorporer dans une modélisation de l'encours moyen par compte. Ceci, adjoint à l'étude des phénomènes de clôture, permet alors de déduire des échéanciers prévisionnels et des indicateurs de sensibilité sur les ressources clientèle.

### **e. La prise en compte des incertitudes dans la modélisation**

Chaque paramètre du modèle précédent est sujet à incertitude : les taux de clôture, les taux de croissance de l'encours moyen, la tendance de l'effet richesse, les paramètres d'arbitrage entre ressources. Cette incertitude peut être inhérente à l'estimation ou peut représenter l'occurrence de crises dans le paysage économique : une augmentation de tous les taux de clôture à la hausse simulerait une crise de liquidité où la clientèle viendrait fermer en masse ses comptes de ressources qu'elle détient au sein de l'établissement.

Toutefois l'évaluation de l'incertitude est rendue difficile par l'estimation des corrélations entre les différents effets. Ainsi, la complexité du modèle peut être quelque peu réduite afin de faciliter les estimations. Par exemple, on peut conserver un unique taux de clôture, un unique taux de croissance de l'encours moyen par compte, indépendants de l'ancienneté tout en supposant un effet richesse déterministe et des paramètres d'arbitrage constants. Pour résumer, il resterait à estimer la corrélation entre clôture et croissance de l'encours moyen par compte, la dépendance aux taux de marché étant réglée par les effets d'arbitrage.

Quantifier l'incertitude sur le modèle joue un grand rôle en communication interne. Dans un processus de négociation entre l'ALM et les filiales ou le réseau, il est de bon augure d'afficher des vérifications ex-post (*back-testing*) positives, de montrer que ce qui s'est réalisé reste dans les « intervalles de confiance ». En reprenant l'exemple de l'échéancement prévisionnel en liquidité, la donnée d'une prévision moyenne ne suffit pas, il est plus significatif de donner une « enveloppe » d'échéanciers possibles et le niveau de probabilité estimé correspondant.

Ainsi, la quantification de l'incertitude est aussi importante que l'estimation. C'est pourquoi, sur le calcul des taux de clôtures il faut également quantifier les performances des estimateurs utilisés.

## Chapitre 10. Un modèle de couverture des marges nettes de taux d'intérêt

### 1. Objectifs – Contexte

#### a. Le choix du critère de marge

##### *La problématique comptable*

Dans le cadre des normes comptables actuelles, les modalités de valorisation des ressources clientèles sont encore largement sujettes à discussion. A l'heure actuelle, la tendance comptable est à la *full fair value*, c'est-à-dire à la comptabilisation et à la couverture des éléments du *Banking Book* sur la base de leur juste valeur.

Pour l'instant la valorisation proposée pour les ressources sans échéances (type dépôts à vue, comptes d'épargne liquides, etc.) correspond à leur valeur nominale, étant donné qu'il s'agit de ressources pouvant potentiellement disparaître immédiatement. Ce mode de valorisation étant jugé trop fruste et sous-estimant très fortement la « vraie » valeur de ces postes du bilan, les banques ont essayé, via des groupes d'influence, de faire adopter des modes de couverture plus fins sur les ressources non échéancées. C'est ainsi qu'en Union Européenne fut créé le *Carved Out Fair Value Hedge*, où la valeur des dépôts et leur couverture se pense sur la base d'un échéancier prévisionnel, plus élaboré que ce qui est préconisé à l'heure actuelle, c'est-à-dire la disparition immédiate de l'encours.

D'une manière plus générale, les banques et l'IASB-FASB réfléchissent actuellement à un mode de couverture basé sur les marges d'intérêt. (*Interest Margin Hedge* ou IMH – cf. par exemple, Adam (2007)). En fait, étant donné l'absence de consensus sur la comptabilité des ressources non échéancées, la pratique bancaire va pour l'instant à la stabilisation des résultats futurs, sur la base des flux générés.

##### *La marge au cœur des pratiques bancaires*

Pour l'ALM, comme nous l'avons souligné jusqu'à présent, l'objectif de pilotage du résultat comptable est primordial. Ainsi, elle s'attache tout particulièrement à assurer la stabilité des marges sur le bilan, davantage que la valeur économique, et pour cela, elle essaie d'élaborer des stratégies de couverture en veillant à ce qu'elles soient reconnues de la bonne manière d'un point de vue comptable. Ainsi, comme nous l'indiquions au Chapitre 3 de cette thèse, il est inutile pour l'ALM de mettre en place des stratégies de couverture sur les flux futurs si d'un point de vue comptable, les produits financiers associés ne sont pas éligibles à la couverture en flux de trésorerie (*Cash Flow Hedge*). C'est pourquoi l'ALM s'attache à justifier les montants des stratégies de couverture par les flux de trésorerie associés sur les différents postes du *Banking Book*, en particulier sur les ressources non échéancées.

D'une manière générale, nous avons déjà évoqué, à la fin du Chapitre 8, plusieurs études montrant l'importance que revêt la stabilisation des marges au sein des établissements bancaires (Ho et Saunders (1981) et successeurs, English (2002)). Aux USA, la SEC<sup>37</sup> elle-même demande aux banques d'inclure les marges nettes d'intérêt et des indicateurs de

---

<sup>37</sup> Cf. le site Internet de la SEC où sont consignés les rapports – <http://www.secinfo.fr/>

sensibilité leur correspondant, au sein des rapports annuels (10-K) et trimestriels (10-Q) des établissements (cf. *Item 7a* et *Item 7b – Quantitative disclosures about market risk*).

Une courte étude, présentée dans l'Annexe D, montre d'ailleurs que les sensibilités affichées par les établissements bancaires dans ces rapports parviennent à rendre compte de l'influence des mouvements des taux sur les marges de manière relativement satisfaisante. On voit toutefois que les variations de marge ne sont pas seulement dues aux mouvements des taux d'intérêt, mais sans doute à des facteurs de risques autres (risque de business, par exemple). C'est également pourquoi nous prenons en compte dans cette partie une source de risque orthogonale au risque de taux.

## **b. La prime de risque sur le marché des taux d'intérêt**

L'existence d'une prime de risque sur les marchés de taux d'intérêt existe depuis la remise en cause de la théorie des anticipations pures par les théories de la segmentation de marché obligataire et de la préférence pour la liquidité<sup>38</sup> (cf. Chapitre 8 de Fabozzi (2007) et Chapitre 11 de Campbell, Lo et McKinlay (1997) par exemple). Ces théories supposent que l'investissement obligataire de long terme porte une prime de risque par rapport à l'investissement de court terme. Ainsi, par exemple, le taux *forward* sur un intervalle de temps futur devrait être inférieur à l'anticipation historique du taux sur la même période.

Dans Adam, Laurent et Rebérioux (2005) le modèle de couverture des marges est placé dans le cadre de la théorie des anticipations pures, c'est-à-dire que l'investissement à long terme n'est pas, vu d'aujourd'hui, plus ou moins rémunérateur que l'investissement à court terme. En revanche, il peut avoir une influence non nulle sur la dispersion, vue d'aujourd'hui, de la marge à la date finale. Dans ce monde risque-neutre, la problématique tourne alors simplement autour de la réduction du risque, tandis qu'avec une prime de risque non nulle, on entre dans une problématique rendement-risque.

Ici nous nous plaçons dans ce cadre, ajoutant à la problématique de réduction du risque celle de l'optimisation du rendement sur les marges nettes de taux d'intérêt.

## **c. Gestion des marges en marché incomplet**

Jusqu'à présent nous avons évoqué le fait que les déterminants des marges nettes d'intérêt ne se limitaient pas aux seuls taux de marché (cf. par exemple Wong (1997) et Saunders et Schumacher (2000)), ou, en d'autres termes, la marge nette de taux d'intérêt à une date future est un actif non-atteignable sur le marché des taux : nous sommes en marché incomplet.

Nous avons vu que l'attitude des clients pouvait être conditionnée par les taux de marché. Par exemple, en France, une hausse des taux se répercute dans le même sens sur les taux des comptes sur livret et pour la clientèle, il devient avantageux de placer son argent sur ces comptes, sans concéder de perte de liquidité de ses actifs (grâce à la banque en ligne, il devient relativement accessible et quasiment gratuit d'effectuer au quotidien des transferts d'argent entre ses comptes). On assiste alors à un ralentissement de la croissance de l'encours

---

<sup>38</sup> Ces termes sont les traductions respectives de *Pure Expectations Theory*, *Preferred Habitat Theory* et *Liquidity Preference Theory* (cf. Fabozzi (2007)).

de dépôts, étant donné cette incitation à placer sur des ressources rémunérées (comptes sur livret, dépôts à terme).

Cependant, l'attitude des clients comporte des facteurs explicatifs autres que l'évolution des taux de marché. Par ailleurs, les études précitées sur les déterminants des marges nettes d'intérêt montrent qu'au-delà de facteurs internes comme les frais de gestion et l'exposition de la banque au risque de crédit, l'environnement réglementaire et le poids commercial de la banque jouent un rôle significatif et comportent des composantes non corrélées aux taux de marché.

C'est pourquoi nous choisissons d'associer à la croissance de l'encours de ressources un facteur de risque de marché lié aux taux et une composante orthogonale représentative de l'aléa non couvrable.

#### **d. Choix du périmètre et du critère de risque**

Le but, dans cette partie, est de déterminer des stratégies statiques et dynamiques de couverture de la marge nette de taux d'intérêt sur un type de ressource non échancée. Pour rappel, la marge nette de taux d'intérêt constitue la marge dégagée par le remplacement des ressources au taux de marché de la période, amputé du versement d'une éventuelle rémunération à la clientèle. Ainsi dorénavant nous désignerons par « dépôts », « dépôts à vue » ou « ressources » la même notion. Celle-ci désigne un compte, sans échéance contractuelle, avec transferts d'argent libres, gratuits et instantanés, rémunéré ou non à un taux versé par l'établissement.

Ce travail peut s'élargir à l'ensemble du bilan bancaire, toutefois cela dépasse le cadre de cette thèse. La modélisation du bilan suppose une connaissance de chacun des produits qui y sont présents et des liens existant entre eux. La pratique de péréquation, consistant en l'utilisation de crédits à taux préférentiels comme produits d'appel, en est un exemple.

Par ailleurs, nous déterminerons dans ce chapitre des stratégies de couverture basées sur un critère de minimisation de la dispersion de la marge. Celle-ci prend la forme de l'écart-type du résultat final avec couverture, selon les anticipations du gestionnaire, c'est-à-dire sous probabilité historique afin de profiter de la prime de risque sur l'investissement à long terme. Le choix du critère quadratique correspond aux pratiques de l'ALM bancaire et répond à une contrainte de faisabilité technique. En effet, nous verrons que de nombreux travaux académiques proposent des solutions explicites aux problèmes de couverture moyenne-variance en marché incomplet.

## **2. Le modèle**

### **a. Modélisation de la dynamique des taux**

Notre objectif est d'immuniser au mieux la marge nette de taux d'intérêt à la date  $T > 0$ , en supposant que le taux de remplacement des ressources sur le marché, avant toute mise en place d'une stratégie de couverture, est un taux court interbancaire. Pour cela, nous utilisons un modèle de marché simplifié pour le taux Libor (cf. Brace, Gatarek et Musiela (1997) ou Miltersen, Sandmann et Sondermann (1997)) à paramètres déterministes constants :

$$\frac{dL(t, T, T + \delta)}{L(t, T, T + \delta)} = \mu_L dt + \sigma_L dW_L(t),$$

où, selon les notations usuelles,  $L(t, T, T + \delta T)$  désigne le taux Libor *forward* vu de la date  $t \in [0; T]$  pour la période  $[T; T + \delta T]$ . Ici,  $\delta T$  représente la durée d'effet de la marge nette de taux d'intérêt. Ainsi, avant toute couverture, la masse de ressources générant cette marge est placée pendant  $\delta T$  au taux  $L(T, T, T + \delta T)$ . En général, la durée de remplacement correspond à celle qui sépare deux comités ALM, où les grandes lignes des stratégies de couverture sont redéfinies, c'est-à-dire un trimestre ( $\delta T = \frac{1}{4}$ ).

## b. Dynamique de l'encours de ressources

D'autre part, nous modélisons l'évolution de la masse de ressources  $K_t$  par un autre processus de diffusion à coefficients déterministes constants :

$$\frac{dK_t}{K_t} = \mu_K dt + \sigma_K d\overline{W}_K(t)$$

et nous supposons que les incréments browniens  $d\overline{W}_K(t)$  et  $dW_L(t)$  sont corrélés, avec un coefficient de corrélation  $\rho$  également supposé déterministe et constant. Ainsi nous écrivons :

$$d\overline{W}_K(t) = \rho dW_L(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_K(t),$$

où  $W_K$  est un mouvement brownien indépendant de  $W_L$ , c'est-à-dire que  $\langle dW_K, dW_L \rangle_t = 0$ , pour tout  $0 \leq t \leq T$ . Nous faisons le choix du mouvement brownien pour modéliser l'encours de dépôts pour des raisons essentiellement pratiques, sachant que c'est également la modélisation choisie dans Kalkbrener et Willing (2004) par exemple.

En termes de filtrations, nous notons  $F^L = (F_t^L)_{0 \leq t \leq T}$  la filtration associée au processus  $W_L$  et  $F^K = (F_t^K)_{0 \leq t \leq T}$  celle associée à  $W_K$ . La filtration globale est notée  $F = (F_t)_{0 \leq t \leq T}$  et correspond à  $F = F^L \vee F^K$ . Economiquement parlant,  $F^L$  représente l'information disponible sur les marchés de taux et de dérivés et  $F$ , l'information totale disponible, date après date, englobant ainsi l'information sur les marchés de taux.

$W_K$  est en fait un processus associé au risque de business non couvrable, car l'aléa qu'il induit ne peut pas se couvrir sur les marchés de taux d'intérêt.

## c. Marge nette de taux d'intérêt

Comme expliqué au chapitre précédent, la marge nette de taux d'intérêt s'obtient en déduisant la rémunération de la clientèle du remplacement des ressources au taux de marché. Ici, nous étudions cette marge à la date d'horizon  $T$ .

Conformément au cadre posé ci-dessus, le taux de marché de remplacement à cette date, avant toute forme de couverture, est donc  $L(T, T, T + \delta T)$ . D'autre part, nous supposons que le taux versé à la clientèle est une fonction du taux Libor terminal ; on l'écrit alors  $g(L(T, T, T + \delta T))$ . Nous avons vu dans la section 3 du Chapitre 8 de cette thèse que d'autres

modélisations de ce taux client avaient été développées dans la littérature scientifique. Dans notre modèle, la prise en compte d'un aléa indépendant de  $W_L(T)$  ne pose pas de problème techniques supplémentaires dans le calcul des stratégies optimales, puisque nous montrons plus loin que celles-ci sont linéaires par rapport à la marge nette de taux d'intérêt. Néanmoins, par souci de simplification, nous nous en tiendrons à une modélisation du taux client comme fonction du taux Libor terminal.

**Définition (marge nette de taux d'intérêt) :** Dans notre modèle, la marge nette de taux d'intérêt totale s'écrit :

$$MNI(T) = K_T \cdot \delta T \cdot [L(T, T, T + \delta T) - g(L(T, T, T + \delta T))].$$

Pour simplifier les notations, nous posons désormais  $L_t = L(t, T, T + \delta T)$ . Pour simplifier les notations, nous choisirons également  $\delta T = 1$  sachant qu'au moyen d'une homothétie triviale, il est possible de revenir à d'autres horizons de calcul de la marge.

#### d. Stratégies de couverture

Nous allons préciser ici ce que nous entendons par « stratégies de couverture ». Pour nous il s'agit de déterminer des stratégies de couverture pour la marge nette d'intérêt parmi des espaces de variables aléatoires (*payoffs*) de plus en plus grands (pour l'inclusion). Ainsi, nous commettrons l'abus de langage de parler de stratégies de couvertures pour ces variables aléatoires.

Tout d'abord, nous considérons l'ensemble des stratégies basées sur des contrats de type *Forward Rate Agreements* (FRAs) prenant effet à la date terminale et contractés à la date initiale ( $t = 0$ ). Le *payoff* d'un tel contrat est alors de  $L_0 - L_T$  à la date finale et l'ensemble relatif est décrit par le montant optimal à investir dans ces contrats. L'espace vectoriel des *payoffs* de couverture ainsi généré s'écrit alors

$$H_{S1} = \{\theta(L_0 - L_T), \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Remarquons que les *payoffs* de cet ensemble sont tous atteignables à l'aide d'un investissement trivial en FRAs et que leur prix est nul.

Nous proposons donc d'étendre l'espace  $H_{S1}$  à l'ensemble suivant de stratégies à coût nul :

$$H_{S2} = \{\varphi(L_T) \mid \varphi \in \Phi, \forall \mathbf{Q} \in \Pi_{RN}, \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}[\varphi(L_T)] = 0\},$$

où  $\Phi$  est l'ensemble des fonctions  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\varphi(L_T)$  est une variable aléatoire de carré intégrable pour la mesure  $\mathbf{P}$  et  $\Pi_{RN}$  est l'ensemble des mesures de probabilité risque neutre.

Ici, l'espace contient l'ensemble des options européennes sur Libor à coût nul. Cet ensemble contient naturellement  $H_{S1}$  puisque toutes les variables aléatoires contenues dans ce dernier ensemble sont des fonctions affines du Libor terminal. Les *payoffs* contenus dans  $H_{S2}$  peuvent en fait tous être reproduits à l'aide de portefeuilles dynamiques de réplcation (à base

de FRAs<sup>39</sup> contractés à chaque date intermédiaire  $0 \leq t \leq T$ ) où le processus d'investissement  $\theta = (\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  est admissible<sup>40</sup> (au sens défini dans Gouriéroux, Laurent et Pham (1998) par exemple) et adapté à la filtration du Libor. On rappelle que la valeur à chaque date intermédiaire  $0 \leq t \leq T$  d'un tel portefeuille de réplication s'écrit, selon les notations usuelles,

$$\int_0^t \theta_u dL_u .$$

En fait, on pourrait songer à considérer l'ensemble plus général des *payoffs* s'écrivant comme la valeur terminale d'un tel portefeuille de réplication, où le processus d'investissement est seulement  $F^L$ -adapté, c'est-à-dire en ne se limitant plus aux seules fonctions du Libor terminal. Un tel ensemble permettrait d'inclure une potentielle *path-dependence* par rapport au processus de Libor forward. Cependant, en raison du critère quadratique (que nous formaliserons plus loin), la stratégie optimale dans cet ensemble s'écrit en fait comme une fonction du Libor terminal, donc appartient à  $H_{S_2}$ , ce que nous démontrons en Annexe B (sous-section 2.b.). Soulignons enfin que dans ces portefeuilles de réplication, le processus d'investissement  $\theta = (\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$  ne prend absolument pas en compte l'information liée au processus d'encours de dépôts.

Ainsi, dans l'ensemble  $H_{S_2}$ , le processus d'investissement dynamique est myope par rapport à l'observation de l'encours de dépôts à chaque date, qui est pourtant une information facilement disponible à tout gestionnaire actif-passif. C'est pourquoi nous proposons d'étendre  $H_{S_2}$  à l'ensemble des portefeuilles dynamiques et auto-financés de FRAs permettant au gestionnaire de tenir compte à chaque date de l'information à sa disposition à la fois sur l'encours de dépôts et les taux de marché. Nous définissons cet ensemble de la manière suivante :

$$H_D = \left\{ \int_0^T \theta_t dL_t, \theta \in \Theta \right\},$$

où  $\Theta$  est l'ensemble des stratégies admissibles au sens défini dans Gouriéroux, Laurent et Pham (1998), c'est-à-dire assurant entre autres une propriété de fermeture (topologique) de l'ensemble  $H_D$ .

Dorénavant, nous utiliserons les notations usuelles pour les portefeuilles dynamiques, à savoir

$V_t(0, \theta) = \int_0^t \theta_u dL_u$  pour tous  $t \in [0, T]$  et  $\theta \in \Theta$ . Par extension nous serons également amenés

à considérer  $V_t(x, \theta) = x + \int_0^t \theta_u dL_u$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

## e. Ecriture du programme d'optimisation

Nous considérons ici la minimisation de la variance de la marge nette de taux d'intérêt. En d'autres termes, nous recherchons les stratégies d'investissement dans chacun des ensembles

<sup>39</sup> Nous rappelons brièvement en Annexe B pourquoi les portefeuilles auto-financés que nous évoquons dans cette section peuvent s'écrire comme des stratégies dynamiques d'investissement en FRAs.

<sup>40</sup> Nous formalisons cette notion de stratégie admissible au début de l'Annexe B.

définis dans la sous-section précédente, qui permettent de minimiser la dispersion quadratique de la marge avec couverture, à la date finale.

Le choix du critère de la variance peut se discuter, notamment au vu des concepts que nous avons introduits en Partie II cette thèse, au sujet d'autres mesures du risque. En fait, ce choix est avant tout technique : les travaux de Gouriéroux, Laurent et Pham (1998) ou Pham, Rheinlander et Schweizer (1998) permettent par exemple de déterminer des stratégies optimales dynamiques dans un cadre moyenne-variance, valables en marché incomplet. D'autre part, nous verrons que pour d'autres critères de risque, les stratégies optimales que nous déterminons sont relativement performantes.

De plus, comme nous l'avons déjà annoncé, avec le critère moyenne-variance, les stratégies optimales que nous déterminerons sont *linéaires* par rapport à l'expression de la marge, ce qui permet de les additionner sur différents éléments du bilan afin d'en déduire une stratégie de couverture globale.

Ainsi, nous formalisons le programme d'optimisation comme suit :

**Programme d'optimisation général – Minimisation de la variance du résultat avec couverture :**

$$\inf_{S \in H} \mathbf{Var}^P [MNI(T) - S]$$

où  $H$  représente alternativement un des trois ensembles  $H_{S1}$ ,  $H_{S2}$  et  $H_D$  définis plus haut.

Ainsi, le programme d'optimisation constitue quasiment un problème de projection orthogonale de la marge nette d'intérêt, sur des espaces de taille croissante, au sens de l'inclusion.

En effet, en ajoutant une contrainte de rendement en posant pour chaque  $H \in \{H_{S1}, H_{S2}, H_D\}$  et  $m \in \mathbb{R}$ ,  $H(m) = \{S \in H \mid \mathbf{E}^P [MNI(T) - S] = m\}$ , le problème ci-dessus devient :

$$\inf_{S \in H(m)} \mathbf{E}^P [MNI(T) - S]^2,$$

et cette dernière écriture correspond à une problématique de projection dans  $L^2(\mathbf{P})$ .

Comme nous le soulignons plus haut, l'ajout d'une contrainte de rendement a du sens du fait de la présence d'une prime de risque  $\lambda = \frac{\mu_L}{\sigma_L}$  sur les taux forward.

Ainsi, le problème que nous venons d'énoncer peut se résoudre par projection orthogonale de la marge sur chacun des ensembles de stratégies avec contrainte de rendement. En particulier, on remarque, par un argument de projection itérée, que la projection orthogonale sur  $H_{S2}(m)$  du portefeuille optimal dynamique dans  $H_D(m)$  mène à la stratégie optimale dans  $H_{S2}(m)$ .

### 3. Détermination des stratégies optimales

Dans cette section, nous proposons de résoudre le programme énoncé ci-dessus pour chacun des ensembles de stratégies.

#### a. Cas des stratégies statiques

Ici, nous nous intéressons à la projection orthogonale de la marge sur les espaces  $H_{S_1}$  et  $H_{S_2}$ . Notons que pour tout  $m \in \mathbb{R}$ ,  $H_{S_1}(m)$  se limite à un point. C'est pourquoi nous revenons à la forme du problème sans contrainte de rendement, qui s'écrit :

$$\inf_{\theta \in \mathbb{R}} \text{Var}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - \theta(L_T - L_0)],$$

dont la solution s'obtient immédiatement par  $\theta_{S_1}^* = \frac{\text{Cov}^{\mathbf{P}}[MNI(T), L_T]}{\text{Var}^{\mathbf{P}}[L_T]}$ .

Dans le cas de  $H_{S_2}$ , on remarque que tout *payoff* de cet ensemble a la même espérance sous n'importe quelle mesure de probabilité risque neutre. Comme suggéré dans Föllmer et Schweizer (1990), nous considérons particulièrement la suivante :

**Définition (mesure martingale minimale) :** La mesure martingale minimale  $\bar{\mathbf{P}}$  associée au processus  $L$  défini plus haut a une densité de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de probabilité historique  $\mathbf{P}$  donnée par :

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \exp(-\lambda^2 T - \lambda W_L(T)).$$

Rappelons que  $\lambda = \frac{\mu_L}{\sigma_L}$  désigne la prime de risque liée à l'investissements dans des obligations de long terme financées par de la dette à court terme. D'autre part, on voit immédiatement que lorsque  $\lambda = 0$ , la mesure martingale minimale coïncide avec la mesure de probabilité historique.

La mesure martingale minimale peut être considérée comme la mesure effective de *pricing* pour les dérivés de taux d'intérêt. Tout *payoff*  $\varphi(L_T)$  peut ainsi être répliqué et le prix de réplication (forward) est  $\mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}}[\varphi(L_T)]$ . De plus, sous nos hypothèses de travail, la mesure martingale minimale définie ci-dessus coïncide avec la mesure de probabilité variance minimale définie dans Gouriéroux, Laurent et Pham (1998).

Ainsi, en réécrivant  $H_{S_2}$  sous la forme  $H_{S_2} = \{\varphi(L_T) \mid \varphi \in \Phi, \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}}[\varphi(L_T)] = 0\}$ , le problème de minimisation devient :

$$\min_{\varphi} \text{Var}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - \varphi(L_T)] \text{ s.c. } \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}}[\varphi(L_T)] = 0,$$

et sa solution est donnée par  $\varphi_{S_2}^*(L_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[H|L_T] - \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}}[H]$ .

Ces résultats sont démontrés dans l'Annexe B (sous-section 2.b.).

## b. Hedging Numéraire et mesure de variance minimale

Dans le cas général, les problèmes de minimisation de variance en marché incomplet sont traités dans Gouriéroux, Laurent et Pham (1998), Pham, Rheinländer et Schweizer (1998) et Laurent et Pham (1999). Des détails sur la théorie développée dans ces travaux sont donnés dans l'Annexe B.

Selon Gouriéroux et al. (1998), il existe un changement de numéraire privilégié afin de résoudre le problème de minimisation de variance, appelé *Hedging Numéraire*. D'après le Théorème 4.1 de cet article, le numéraire correspond à la stratégie dynamique  $\theta^{HN}$  solution du problème suivant :

$$\min_{\substack{\theta \in \Theta(m) \\ m \in \mathbb{R}}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ 1 + \int_0^T \theta_t dL_t \right]^2 \Leftrightarrow \min_{\substack{\theta \in \Theta(m) \\ m \in \mathbb{R}}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [V_T(1, \theta)]^2.$$

Le Théorème 4.2 de Gouriéroux et al. (1998) assure que la valeur du portefeuille associé à la stratégie  $\theta^{HN}$  est bien strictement positive  $\mathbf{P}$ -presque sûrement. Elle s'associe donc naturellement à une mesure de probabilité que nous appellerons désormais *mesure de probabilité variance minimale* et coïncide dans notre cas avec la probabilité martingale minimale  $\bar{\mathbf{P}}$  de Föllmer et Schweizer (1990) définie plus haut.

La proposition suivante rappelle l'expression de la stratégie correspondant au *Hedging Numéraire* ainsi que la densité de Radon-Nikodym de la probabilité variance minimale. C'est une application des Théorèmes 4.1 de Gouriéroux et al. (1998), 4.2 de Laurent et Pham (1999) et de la Proposition 5.1 de ce même article.

**Proposition (*Hedging Numéraire* et densité de probabilité variance minimale) :** La stratégie d'investissement relative au *Hedging Numéraire* est donnée de manière dynamique par

$$\forall t \in [0; T], \theta_t^{HN} = -\frac{\lambda}{\sigma_L L_t} N_t$$

où  $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$  est le processus de valeur de *Hedging Numéraire*, qui s'écrit, avec notre modèle de taux, comme une puissance du Libor à la même date,

$$N_t = \left( \frac{L_t}{L_0} \right)^{\frac{-\lambda}{\sigma_L}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \lambda (\lambda + \sigma_L) t \right].$$

La densité de probabilité variance minimale est alors donnée par  $\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \frac{N_T}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}} [N_T^2]}$ .

*Preuve.* Cette proposition est une conséquence immédiate des résultats exposés dans l'Annexe B.  $\square$

### c. Solution du programme d'optimisation dynamique

Le théorème suivant donne la solution au programme d'optimisation énoncé plus haut.

**Théorème (Stratégie optimale de minimisation de la variance du résultat sous contrainte de rendement) :** Le processus donnant la stratégie d'investissement  $\theta^*(m) = (\theta_t^*(m))_{0 \leq t \leq T}$  solution du programme d'optimisation dynamique contraint est déterminé de manière dynamique par :

$$\theta_t^*(m) = \frac{\partial \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]}{\partial L_t} - \frac{\theta_t^{HN}}{N_t} \left[ \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)] - V_t(x(m), \theta^*) \right]$$

avec  $x(m) = \frac{m - \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [N_T] \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]}{1 - \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [N_T]}$  et où  $\theta^{HN}$  désigne le processus d'investissement relatif au *Hedging Numéraire*.

*Preuve.* Cf. Annexe B. □

**Remarque :** D'une manière plus générale, cette solution est en fait valable dès lors que les coefficients de diffusion du taux Libor *forward* sont  $F^L$ -adaptés. En particulier, la forme de la stratégie ci-dessus est identique dans un modèle à volatilité locale. En revanche, dans le cas de la volatilité stochastique, la forme du *Hedging Numéraire* est un peu plus complexe. Par exemple, une solution dans le cadre du modèle de Heston est donnée dans Laurent et Pham (1999).

Par ailleurs, la démonstration de ce résultat ne fait aucunement appel à l'équation de diffusion que nous avons introduit pour l'encours de dépôts. Toutefois la plupart des résultats que nous proposons par la suite s'appuient sur ce modèle. En particulier, il est tout à fait possible de greffer un modèle comportemental du type de celui développé au Chapitre 9 de cette thèse, sur ce résultat.

Le même constat vaut pour le taux client. Même si dans les exemples nous utilisons un taux client uniquement fonction des taux de marché, on peut appliquer un modèle plus général, comme ceux développés dans la littérature scientifique sur le sujet et que nous rappelons à la fin du Chapitre 8 de cette thèse. On peut par exemple imaginer que l'évolution de l'encours de dépôts influe sur le niveau de leur rémunération, comme dans les modèles d'équilibre développés dans Hutchison (1995) et Hutchison et Pennacchi (1996).

**Remarque :** Supposons que l'encours de dépôts se diffuse comme décrit plus haut et que le taux client est une fonction affine des taux de marché, qui s'écrit  $g(L_T) = \alpha L_T + \beta$ . Ainsi, la marge nette d'intérêt prend la forme suivante :

$$MNI(T) = (1 - \alpha) K_T L_T - \beta K_T,$$

et ce cas, Duffie et Richardson (1991) proposent une forme explicite pour la stratégie optimale d'investissement.

Ci-dessous nous donnons les performances en termes de rendement et de variance du résultat, relativement à cette stratégie optimale. C'est l'objet de la proposition suivante.

**Proposition (Performances de la stratégie optimale) :** Le niveau de rendement correspondant au point de variance minimale est donné par  $m^{**} = \mathbf{E}^{\mathbb{P}}[MNI(T)]$ . On note  $\sigma^{**}$  l'écart type associé. Ainsi, pour tout autre niveau de rendement  $m$ , l'écart type  $\sigma^*(m)$  de la marge couverte est donné par :

$$(\sigma^*(m))^2 = (\sigma^{**})^2 + \frac{\mathbf{E}^{\mathbb{P}}[N_T]}{1 - \mathbf{E}^{\mathbb{P}}[N_T]} (m - m^{**})^2.$$

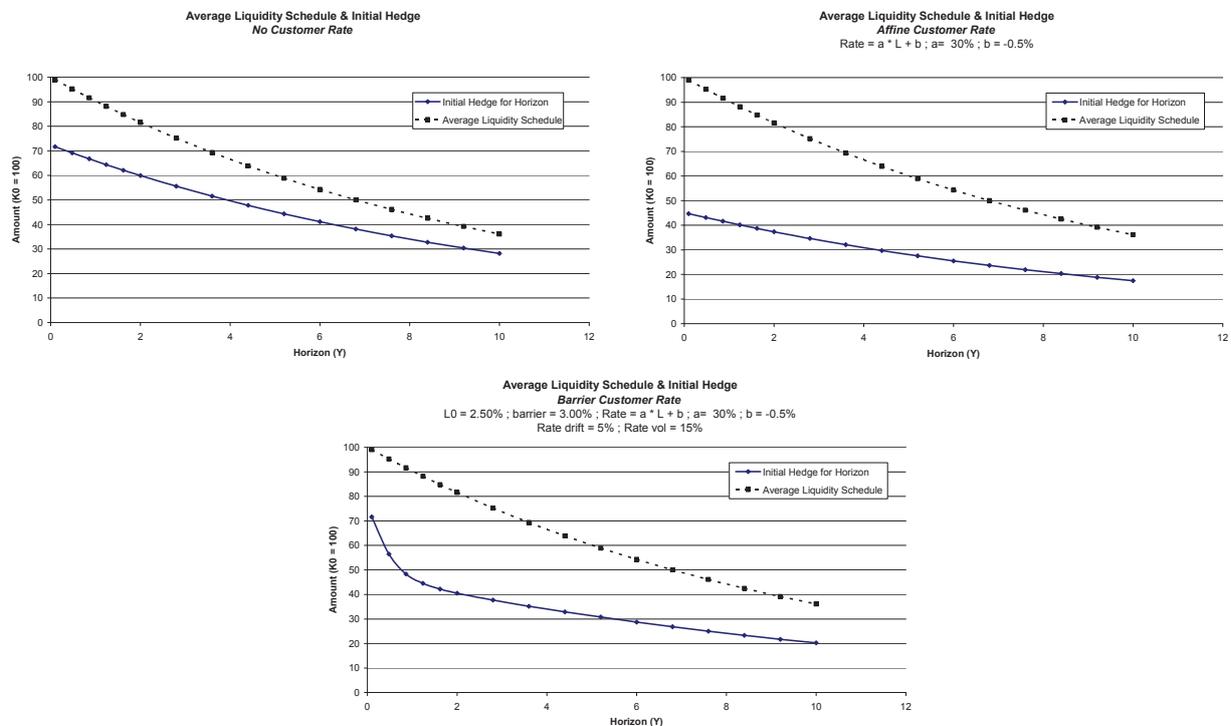
*Preuve* Cf Annexe B. □

#### d. Equivalent Delta et échéancier de taux

Enfin, il existe un autre mode de couverture statique qui consiste à considérer le portefeuille dynamique optimal de couverture, mais avec une seule date de rebalancement, en  $t = 0$ , ce qui revient à choisir une stratégie d'investissement constante  $\theta_t = \theta_0 = \frac{\partial \mathbf{E}^{\mathbb{P}}[MNI(T)]}{\partial L_0}$ . Un tel

choix est forcément moins performant, dans le cadre moyenne-variance, que la stratégie statique correspondant au cas de  $H_{S1}$ , donc a fortiori aussi pour les cas de  $H_{S2}$  et  $H_D$ .

Cette stratégie est toutefois largement utilisée par les praticiens pour la couverture du risque de taux sur les marges d'intérêt, sous le nom d'*equivalent delta*. C'est d'ailleurs en calculant ces quantités, en faisant varier l'horizon  $T$ , qu'on obtient un échéancier de taux, comme nous le définissons au chapitre précédent et que nous représentons dans la Figure 10.1 ci-dessous.



**Figure 10.1. Échéancier de taux dans notre modèle.** Les graphiques représentent l'échéancier de liquidité moyen et l'échéancier de taux associé (le montant d'équivalent delta pour chaque horizon), suivant que le taux de rémunération est nul (en haut à gauche), affine (en haut à droite) ou à barrière (en bas). Les paramètres utilisés sont ceux de la section 4 (cf. ci-après), à l'exception de  $\mu_K = -10.19\%$ .

## 4. Comparaison et robustesse des stratégies d'investissement.

### a. Résultats empiriques sur les stratégies statiques

Dans cette sous-section et les suivantes, nous présentons des résultats à l'aide du modèle présenté plus haut, c'est-à-dire une diffusion log-normale à coefficients constants des encours de dépôts et une diffusion log-normale à coefficients constants des taux Libor *forward*. Nous considérons également trois situations :

- celle où le taux client est nul (exemple des dépôts à vue français) ;
- celle où le taux client est une fonction affine des taux de marché  $g(L_T) = \alpha L_T + \beta$  ;
- celle où le taux client est une fonction affine avec un seuil de déclenchement  $g(L_T) = \mathbf{1}\{L_T \geq R\} \cdot (\alpha L_T + \beta)$ .

Ce dernier cas correspond à la situation observée au Japon dans les années 2000 où les taux étaient trop bas pour que les banques continuent à verser une rémunération à leurs clients sur la plupart des comptes d'épargne (cf. Annexe C).

Nous avons choisi de représenter très schématiquement le cas japonais par la fonction discontinue ci-dessus. L'idée sous-jacente est de suggérer que la marge de taux peut éventuellement présenter un profil optionnel plus complexe que dans le cas d'un taux client affine.

Par ailleurs, nous considérons les valeurs de paramètres suivantes :

$\mu_K = 10.19\%$ ,  $\sigma_K = 6.56\%$ ,  $\rho = -65\%$ , correspondant aux paramètres estimés sur l'agrégat M1 de la zone Euro ;

$\mu_L = 5.15\%$ ,  $\sigma_L = 15.42\%$ , correspondant également à l'estimation des paramètres d'évolution des taux sur la zone Euro ;

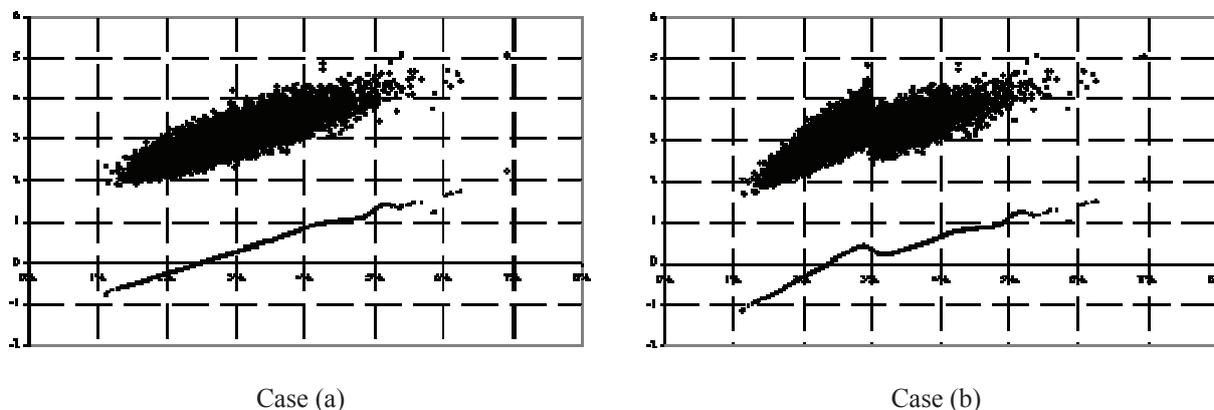
$T = 2$ ,  $L_0 = 2.50\%$ ,  $K_0 = 100$  pour ce qui est des paramètres restants.

Ces paramètres constituent davantage des ordres de grandeur que des estimations provenant d'une procédure économétrique poussée. En d'autres termes, nous négligeons en première approximation les effets d'auto-corrélation, de court terme, les biais de saisonnalité, etc. (ceux-ci sont mieux pris en compte dans Janosi et al. (1999) et Hutchison et Pennacchi (1996) par exemple). Par ailleurs, nous proposons également en Annexe C des estimations des paramètres de diffusion de l'encours de dépôts (corrélation incluse) sur différents marchés (Zone Euro, Etats-Unis, marchés émergents).

A titre indicatif, en ce qui concerne les taux client, nous avons choisi un seuil déclencheur  $R = 3.00\%$  et pour la partie affine,  $\alpha = 30\%$  et  $\beta = -0.50\%$ . Nous proposons également en Annexe C des exemples de la relation entre taux de rémunération et taux de marché et les estimateurs associés, sur différents marchés (USA, Zone Euro et le cas particulier du Japon).

Nous représentons dans la Figure 10.2 ci-dessous conjointement la fonction  $\varphi^{S^2}(L_T)$  en fonction de  $L_T$ , correspondant à la stratégie optimale dans  $H_{S^2}$  et la marge nette de taux

d'intérêt (sans couverture). L'aspect en nuage de points de cette dernière correspond à l'expression du risque spécifique sur l'encours de dépôts, permettant à la marge de prendre plusieurs valeurs pour le même niveau du taux terminal  $L_T$ .



**Figure 10.2. Marge de Taux d'Intérêt et Payoff Optionnel Optimal.** Dans ces deux graphiques, le nuage supérieur représente la marge nette de taux sans couverture (axe des ordonnées) par rapport au niveau de Libor  $L_T$  (axe des abscisses) et la courbe inférieure représente le *payoff* optionnel optimal  $\phi(L_T)$  dans  $H_{S2}$ .

En comparant la méthode basée sur une option exotique de taux et la méthode, moins optimale, consistant à utiliser uniquement des FRAs contractés à la date initiale, nous remarquons que les différences de performances s'accroissent à mesure que le profil de taux client passe d'affine à discontinu. En effet, en observant le Tableau 10.3 ci-dessous, on note que pour le même niveau de revenu espéré, pour un taux affine ou nul, faire appel aux stratégies optionnelles de  $H_{S2}$  n'apporte quasiment rien de plus que l'utilisation de FRAs contractés à  $t=0$ , en termes de réduction du risque. Ce n'est plus le cas pour un taux client à barrière (type japonais).

Hedging Methods		Zero Deposit Rate	Affine Deposit Rate	Barrier Deposit Rate
Static Hedge Case 1	Return	3.12	2.84	3.04
	St. Dev.	0.24	0.22	0.28
Static Hedge Case 2	Return	3.12	2.84	3.04
	St. Dev.	0.24	0.22	0.24

**Tableau 10.3. Comparaison des stratégies statiques.** 'Static Hedge Case 1' correspond à la stratégie optimale en FRAs contractés à  $t=0$  (cas de  $H_{S1}$ ) et 'Static Hedge Case 2' correspond à l'utilisation d'une stratégie optionnelle sur le Libor terminal (cas de  $H_{S2}$ ). Les resultants correspondent à un encours initial de dépôts  $K_0 = 100$ .

Ce résultat suggère qu'il vaut d'autant mieux utiliser un profil optionnel que l'option implicite des dépôts se complexifie ou sa spécification est rendue plus difficile.

## b. Optimalité des stratégies dynamiques

Un corollaire du théorème donnant la stratégie dynamique optimale (cf. section 3.c de ce chapitre) concerne les conditions du premier ordre associées, c'est-à-dire que la stratégie de variance minimale  $\theta^{**}$  vérifie  $\text{Cov}^P(MNI(T) - V_T(\theta^{**}), V_T(\theta)) = 0$  pour toute stratégie

admissible  $\theta \in \Theta$ . Cette relation n'est pas sans rappeler les conditions remplies par l'estimateur des moments généralisés ; ainsi, les tests de spécification associés peuvent être appliqués ici, à l'aide de simulations, afin de vérifier l'optimalité de la stratégie  $\theta^{**}$ .

Ici, nous allons nous contenter du corrélation nulle de Fisher, par rapport à deux stratégies admissibles  $\theta \in \Theta$  bien choisies, correspondant aux cas suivants<sup>41</sup>:

- entre  $MNI(T) - V_T(\theta^{**})$  et  $V_T(\theta) = L_T - L_0$  (cas A);
- entre  $MNI(T) - V_T(\theta^{**})$  et  $V_T(\theta) = L_{T/2} - L_0$  (cas B).

Les résultats sont reportés dans le tableau 10.4 ci-dessous, pour plusieurs fréquences de rebalancement du portefeuille optimal. Nous montrons, comme attendu, que la stratégie optimal vérifie les conditions du premier ordre dans les deux cas énoncés. Ici encore, les paramètres choisis correspondent à ceux calculés sur la Zone Euro (cf. section 4.a. de ce chapitre).

Customer Rate Type	Re-investment frequency (times per year)	Correlation	P-Value (Fisher)	Customer Rate Type	Re-investment frequency (times per year)	Correlation	P-Value (Fisher)
Barrier Customer Rate	2	-7.3%	100.0%	Barrier Customer Rate	2	-5.4%	100.0%
	4	-4.1%	100.0%		4	-2.4%	99.9%
	12	-2.1%	99.7%		12	-1.6%	97.7%
	24	-1.4%	95.8%		24	0.1%	7.0%
Affine Customer Rate	2	-0.8%	76.9%	Affine Customer Rate	2	-0.5%	51.2%
	4	-1.0%	84.3%		4	0.0%	1.2%
	12	-1.2%	89.8%		12	-0.8%	72.9%
	24	-0.7%	71.1%		24	0.4%	46.5%
No Customer Rate	2	-1.9%	99.2%	No Customer Rate	2	-1.2%	91.1%
	4	-1.5%	96.1%		4	-0.3%	31.6%
	12	-1.3%	93.1%		12	-0.9%	78.8%
	24	-0.8%	73.9%		24	-0.6%	60.4%

**Tableau 10.4. Test de corrélation nulle.** (à gauche : Cas A ; à droite : Cas B). La fréquence de rebalancement du portefeuille optimal varie de 2 fois l'an (semestriellement) à 24 par an (toutes les 2 semaines). L'estimateur de la corrélation entre la marge couverte dynamiquement et chacune des stratégies 'test' retourne des valeurs très faibles, qui satisfont le test de Fisher d'autant mieux que la fréquence de rebalancement augmente.

Par ailleurs, on note dans les figures 10.5a et 10.5b une certaine indépendance de la marge couverte dynamiquement (dans  $H_D$ ) par rapport au niveau du Libor terminal et au niveau du Libor à mi-maturité  $L_{T/2}$ . Ainsi, à première vue, la stratégie de couverture semble avoir éliminé toute sensibilité de la marge au niveau des taux de marché.

<sup>41</sup> Le premier correspond à  $\theta = 1$  et le second, à  $\theta = 1$  pour  $0 \leq t \leq T/2$  et  $0$  pour  $T/2 \leq t \leq T$ .

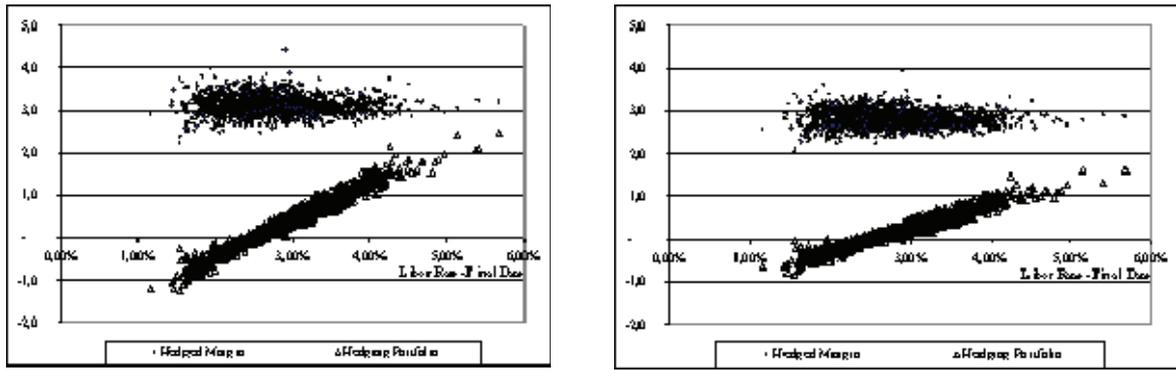


Figure 10.5a. Marge couverte et portefeuille de couverture dynamique par rapport au niveau de Libor terminal. (à gauche : taux client nul – à droite : taux client affine). La valeur terminale du portefeuille de couverture correspond au nuage de triangles vides et la marge couverte, au nuage de points. Ces grandeurs sont consignées sur l’axe des ordonnées et le niveau du Libor terminal, sur l’axe des abscisses.

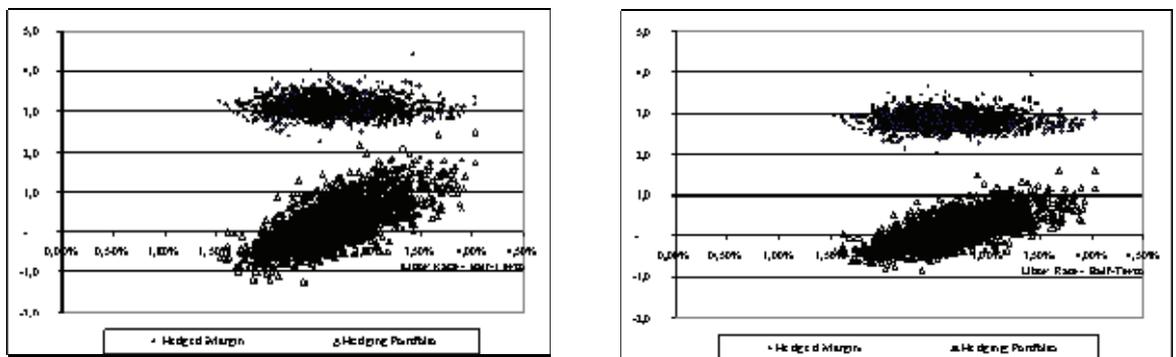


Figure 10.5b. Marge couverte et portefeuille de couverture dynamique par rapport au niveau de Libor à mi-maturité. (à gauche : taux client nul – à droite : taux client affine). Même légende qu’en figure 10.5a.

### c. Comparaison des stratégies statiques et dynamiques

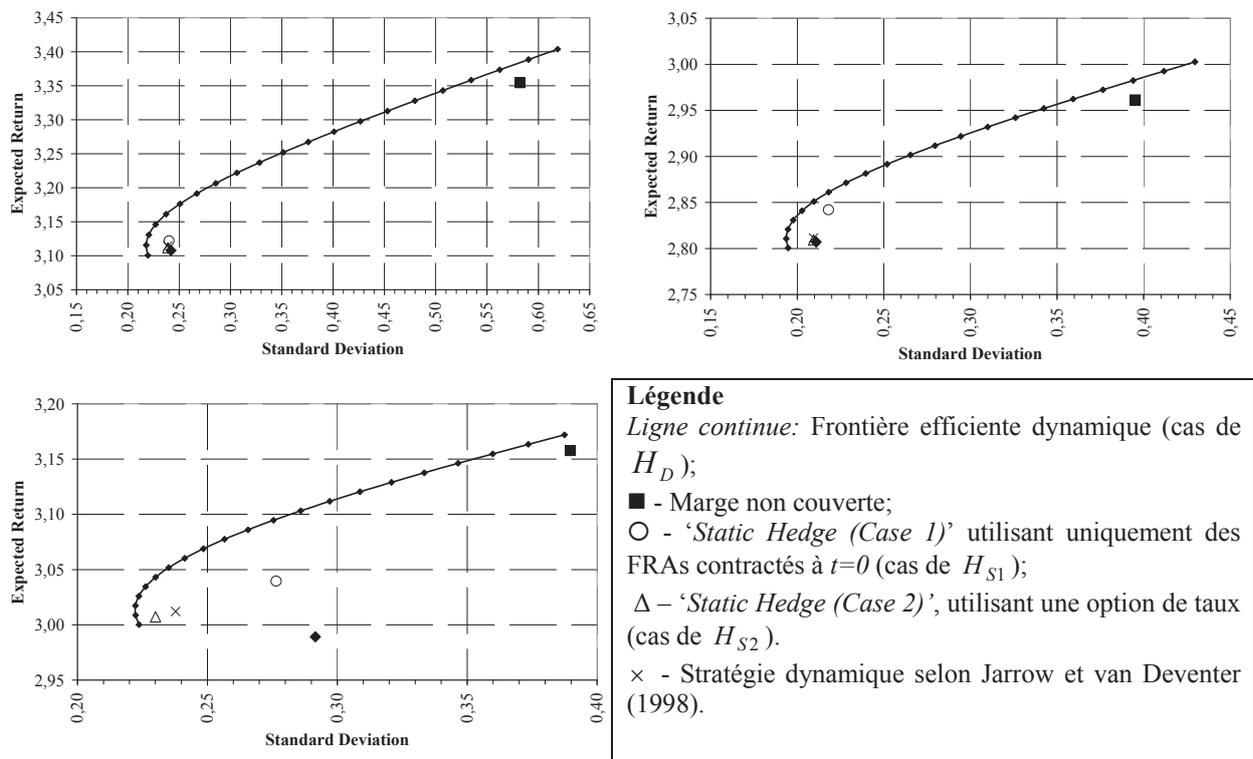
La Figure 10.6 contient des frontières efficaces correspondant au problème de couverture dynamique, pour trois types de taux client (nul, affine et à barrière), en faisant varier le niveau de rendement (cf. la proposition donnant les performances de la stratégie dynamique optimale, en section 3.d de ce chapitre). Nous avons également représenté les points de variance minimale dans chacun des ensembles de stratégies statiques décrits en section 2.d de ce chapitre.

Dans l’article de Jarrow et van Deventer (1998), l’encours de dépôts est considéré comme une grandeur contingente aux seuls taux de marché et les marges de taux comme des swaplets exotiques de taux. Ainsi, nous avons calculé le portefeuille de réplcation associé à ce produit dérivé de taux, comme suggéré dans leur travail. Soulignons que dans notre modèle, une telle stratégie est moins optimale que la couverture optionnelle  $\varphi^{S^2}(L_T)$  et le portefeuille de réplcation correspondant<sup>42</sup>. A l’heure actuelle, l’approche de Jarrow et van Deventer

<sup>42</sup> En effet, sous nos hypothèses, le portefeuille de réplcation selon Jarrow et van Deventer (1998) appartient à l’ensemble des portefeuilles résultant de l’utilisation d’une stratégie d’investissement  $\theta \in \Theta$  adaptée par rapport à la filtration engendrée par le Libor forward. Ainsi, comme nous l’avons déjà évoqué et montré ans l’Annexe B, l’optimum dans cet ensemble de stratégies est atteint pour une fonction du Libor terminal, donc dans  $H_{S^2}$ .

constitue un modèle de référence pour la gestion des dépôts, c'est pourquoi nous avons ajouté le point qui correspond dans le plan moyenne-variance.

Les graphiques ci-dessous montrent que les distances entre toutes ces stratégies et à la frontière efficiente, augmentent lorsque le profil de taux client s'éloigne de la forme affine. C'est ce qu'on note en particulier entre la stratégie optimale selon Jarrow et van Deventer et la stratégie optimale comme fonction du Libor terminal (cas de  $H_{S2}$ ). En effet, leurs performances sont plutôt proches pour un taux client affine ou nul mais s'éloignent légèrement pour un taux à barrière. Cependant, pour ce qui est de l'approximation dans  $H_{S1}$  de la marge nette de taux, celle-ci manque cruellement de précision lorsque l'option implicite de taux se complexifie.



**Figure 10.6. Frontières efficaces et quelques stratégies de couverture.** (en haut à gauche : taux client nul – en haut à droite : taux client affine – en bas à gauche : taux client à barrière).

Cette dernière étude suggère que l'utilisation d'une fonction du Libor terminal comme stratégie de couverture constitue un stratégie fiable, puisqu'elle semble garder une certaine proximité à la frontière efficiente, quelle que soit la spécification du taux client. C'est une propriété relativement intéressante, puisque l'identification de l'option implicite de taux dans les marges de taux liées aux dépôts est souvent une tâche ardue.

Par ailleurs, par rapport aux *payoffs* contenus dans  $H_{S2}$ , l'utilisation d'une stratégie dynamique dans  $H_D$  incorpore l'information spécifique apportée par le processus d'encours de dépôts. A première vue, ceci devrait impliquer une réduction accrue du risque spécifique contenu dans l'encours de dépôts.

En effet, dans le Tableau 10.7 ci-dessous, on remarque que l'écart entre les variances minimisées selon chacune des stratégies augmente de 8.6% à 11.4% à mesure que le paramètre de corrélation  $\rho$  entre le processus d'encours et celui de taux diminue. En d'autres termes, lorsque l'importance relative du risque spécifique des dépôts augmente (par rapport à la part du risque liée aux taux de marché), la stratégie dynamique optimale dans  $H_D$  surperforme la stratégie optionnelle  $\varphi^{S^2}(L_T)$  d'une manière de plus en plus importante. Comme on pouvait s'y attendre, la couverture optionnelle dans  $H_{S^2}$ , donc a fortiori la méthode de Jarrow et van Deventer, montre certaines imperfections quant au traitement du risque spécifique lié aux dépôts.

Correlation	0%	-10%	-30%	-65%	-90%	-100%
Optimal Dynamic Hedge	0.2867	0.2849	0.2724	0.2161	0.1236	0
Static Hedge Case 2	0.3195	0.3165	0.3009	0.2364	0.1343	0
Relative Difference	11.4%	11.1%	10.5%	9.4%	8.6%	N/A

**Tableau 10.7. Comparaison entre la stratégie dynamique optimale et la stratégie optionnelle dans  $H_{S^2}$  lorsque la part du risque spécifique des dépôts augmente.** Le tableau ci-dessus contient les niveaux d'écart type de la marge couverte selon deux types stratégies. 'Optimal Dynamic Hedge' correspond à l'extrémité gauche de la frontière efficiente (point de variance minimale) et fait référence à la stratégie dynamique optimale dans  $H_D$ . 'Static Hedge Case 2' correspond à la couverture optionnelle optimale dans  $H_{S^2}$ . 'Relative Difference' mesure l'écart relative de la ligne 2 sur la ligne 1.

#### d. Robustesse par rapport à d'autres mesures de risque

Comme nous l'évoquions dans les deux premières parties de cette thèse, la gestion des risques interne des banques implique souvent des calculs de Value at Risk et d'Expected Shortfall (cf. Partie II pour les définitions de ces mesures). Dans les tableaux 10.8a (taux client à barrière) et 10.8b (taux client nul), nous proposons de comparer les performances des différentes stratégies de couvertures exposées pour ces mesures. Nous considérons pour cela un seuil de 99.95% pour la VaR et de 99.5% pour l'ES (ce sont des niveaux de quantiles utilisés de manière courante dans le calcul du capital économique par exemple).

Barrier Deposit Rate	Expected Return	Standard Deviation		ES (99.5%)		VaR (99.95%)	
		Level	Risk Reduction	Level	Risk Reduction	Level	Risk Reduction
Unhedged Margin	3.16	0.39		-2.02		-1.90	
Static Hedge Case 1	3.04	0.28	-0.11	-2.34	-0.32	-2.26	-0.36
Static Hedge Case 2	3.01	0.23	-0.16	-2.26	-0.24	-2.04	-0.14
Jarrow and van Deventer	3.01	0.24	-0.15	-2.35	-0.33	-2.25	-0.35
Optimal Dynamic Hedge	3.01	0.22	-0.17	-2.38	-0.36	-2.29	-0.39

**Table 10.8a. Mesure du risque pour les différentes stratégies de couverture – Taux client à barrière.** La première ligne concerne la marge non couverte : nous avons ainsi calculé le revenu espéré et le risque de cette quantité selon les différents critères. *Static Hedge Case 1* correspond à la stratégie de couverture n'utilisant que des FRAs contractés à  $t=0$ , *Static Hedge Case 2*, à la stratégie de couverture optionnelle et *Static Hedge Case 3*, à la couverture suivant la méthode de Jarrow et van Deventer. En italique, il s'agit du gain en risque par rapport à la marge non couverte.

Les valeurs négatives de l'ES et de la VaR sont dues au fait que la marge (couverte ou non) à la date  $T$  est une quantité essentiellement strictement positive<sup>43</sup>. Ainsi, la VaR à 99.95% de la marge non couverte est de -1.90 pour un encours initial de 100, ce qui signifie que la marge à  $T$  a une probabilité de 0.05% d'être inférieure ou égale à 1.90. Dans le tableau 10.8a ci-dessus, on remarque que l'utilisation de la couverture dynamique optimale diminue le risque en VaR sur la marge de 0.39 pour lui faire atteindre une VaR de -2.29. Ceci constitue alors une meilleure réduction du risque en VaR que les autres stratégies mentionnées ici. On constate le même résultat sur l'écart-type, par construction, et l'ES.

<i>No Deposit Rate</i>	Expected Return	Standard Deviation		ES (99.5%)		VaR (99.95%)	
		Level	Risk Reduction	Level	Risk Reduction	Level	Risk Reduction
Unhedged Margin	3.35	0.58		-2.02		-1.90	
Static Hedge Case 1	3.12	0.24	-0.34	-2.42	-0.40	-2.29	-0.39
Static Hedge Case 2	3.11	0.24	-0.34	-2.35	-0.33	-2.17	-0.27
Jarrow and van Deventer	3.11	0.24	-0.34	-2.35	-0.33	-2.25	-0.35
Optimal Dynamic Hedge	3.11	0.22	-0.36	-2.47	-0.45	-2.36	-0.46

**Tableau 10.8b. Mesure du risque pour les différentes stratégies de couverture – Taux client nul.** Même légende que plus haut.

La stratégie dynamique se révèle plus efficiente que la stratégie optionnelle  $\varphi^{S^2}(L_T)$  (*Static Hedge Case 2*), pour toutes les mesures de risque et les deux types de taux client. Notons par ailleurs que le mode de couverture préconisé par Jarrow et van Deventer se révèle très bon dans le cas d'un taux client nul, ou plus généralement dans le cas d'un taux client affine. D'une manière générale, on note de bonnes qualités de robustesse de la stratégie dynamique optimale par rapport au choix de la mesure de risque. Cela nous conforte quant à la stabilité du cadre moyenne-variance pour ce problème, techniquement plus abordable qu'un cadre moyenne-VaR ou moyenne-ES.

<sup>43</sup> Ici, conformément à Acerbi et Tasche (2002), nous définissons la VaR à 99.95% comme l'opposé du quantile 0.05% de la distribution. C'est avec la même convention que nous calculons l'Expected Shortfall.

## Conclusion

Ce rapport propose un certain nombre de conclusions quant à l'identification, à la quantification et à la couverture des risques en ALM, au moins sur le sujet du risque de taux d'intérêt des ressources non échéancées.

De nombreuses mesures de risque (mesures spectrales et de distorsion, mesures basées sur les moments) existent à l'heure actuelle et peuvent être utilisées dans des processus de calcul du capital économique, dans le *reporting* interne en matière de gestion des risques et dans les processus d'allocation des fonds propres. L'étude que nous avons menée quant au problème d'optimisation de portefeuille montre cependant une certaine robustesse des modes d'allocation par rapport au choix du critère. Nous en déduisons que l'adoption de nouvelles mesures ne devrait en général pas introduire de modifications notables des pratiques de gestion.

D'autre part, on constate que, lorsque la contrainte de risque devient très peu permissive, le postulat selon lequel une diversification permet une diminution du risque global se retrouve remis en question. C'est également le cas pour des mesures de risque mettant l'accent sur les quantiles extrêmes de la distribution, ce qui correspond, d'après la représentation par scénarios généralisés, à des scénarios de crise (*stress testing*). Toutefois, sur ce point, il faut sans doute procéder à une étude plus poussée de l'estimation des mesures de risque sur les queues de distribution.

Par ailleurs, l'identification des sources de risque en ALM est rendue complexe par la présence d'un risque de « business » dans les marges dégagées par l'activité d'intermédiation. Toutefois, celui-ci a un impact non négligeable sur les résultats futurs et sur la forme des stratégies de couverture. On s'aperçoit en effet qu'un suivi dynamique de la stratégie de couverture permet une meilleure appréhension du risque spécifique de business. Toutefois, devant les coûts à consentir sur des stratégies dynamiques dont les montants atteignent plusieurs dizaines de milliards d'euros, il peut être bon de minimiser la fréquence de rebalancement du portefeuille de couverture et dans ce but nous avons vu que certaines stratégies statiques pouvaient constituer une bonne alternative.

Cependant, devant la multiplicité des problématiques rencontrées en l'ALM, force est de constater que les pistes de recherche sont encore nombreuses. Ainsi, avec l'amélioration des systèmes informatiques, des bases de données de plus en plus fines sont désormais disponibles, ce qui crée autant de problématiques de modélisation sur les postes du bilan. Ainsi, on pourrait penser à étudier les mouvements de la clientèle à une précision unitaire, c'est-à-dire au niveau de la « gestion actif passif du client » : dépôt à vue, comptes d'épargne, crédit immobilier, crédits à la consommation, etc. Les réalisations sur ce sujet sont encore assez peu développées, mais les premiers essais montrent que la théorie se frotte à des problèmes d'ordre numérique (taille de mémoire) et algorithmique (temps de calcul).

D'autre part, avec la tendance des normes comptables vers la *full fair value*, il se pose la question de la mesure *multi-périodique* des risques, c'est-à-dire une appréhension du risque porté par toute une chronique de flux futurs. Du point de vue académique, la question commence à être relativement bien abordée sur le plan théorique, mais elle a pour l'instant été assez peu tranchée au sein des banques.

# Bibliographie

## Partie I. Présentation et contexte de l'ALM bancaire.

### Références Académiques

- ADAM, A., 2007. Handbook of asset and liability management. Wiley.
- BESSIS, J., 2002. Risk Management in Banking. Wiley.
- CROUHY, M., GALAI, D., MARK, R., 2001. Risk Management. McGraw Hill.
- DARMON, J., 1998. Stratégies bancaires et gestion de bilan. Economica.
- DEMEY, P., FRACHOT, A., RIBOULET, G., 2003. Introduction à la gestion actif-passif. Economica.
- DUBERNET, M., 1997. Gestion actif-passif et tarification des services bancaires. Economica.

### Publications Officielles

- Règlement de la Commission Européenne : Norme Comptable IAS 39. Journal officiel de l'Union Européenne, Décembre 2004.
- Règlement de la Commission Européenne : Norme Comptable IAS 32. Journal officiel de l'Union Européenne, Décembre 2004.
- BIS Recommendations concerning the Subprime Crisis. Disponible sur <http://www.bis.org/>
- Commission Bancaire Française. Site Internet <http://www.banque-france.fr/>
- Bank for International Settlements (BIS). Site Internet <http://www.bis.org/>

## Partie II. Mesures de risque et optimisation de portefeuille.

### Chapitre 6 – Mesure du risque et aspects théoriques

- ACERBI, C., 2002. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion, Journal of Banking and Finance 26 (7), 1505-1518.
- ACERBI, C., TASCHE, D., 2002. On the coherence of expected shortfall. Journal of Banking and Finance 26 (7), 1487-1503.
- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., HEATH, D., 1999. Coherent measures of risk. Mathematical Finance 9 (3), 203-228
- CHABAANE, A., LAURENT, J.-P., MALEVERGNE, Y., TURPIN, F., 2006. Alternative risk measures for alternative investments. Journal of Risk 8 (4), 1-32.
- DANIELSSON, J., JORGENSEN, B.N., SARMA, M., DE VRIES, C.G., 2006. Comparing downside risk measures for heavy tailed distributions. Economic Letters 92 (2), 202-208.

- DE GIORGI, E., 2005. Reward-risk portfolio selection and stochastic dominance. *Journal of Banking and Finance* 29 (4), 895-926.
- DELBAEN, F., 2000. Coherent risk measures. Notes de cours, Scuola Normale Superiore de Pisa.
- DELBAEN, F., 2000. Coherent risk measures on general probability spaces. Working paper, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.
- DENNEBERG, D., 1994. Non-additive measure and integral. Kluwer Academic Publishers.
- DENNEBERG, D., 1990. Premium calculation: Why standard deviation should be replaced by absolute deviation. *Astin Bulletin* 20 (2), 181-190.
- DENUIT, M., DHAENE, J., GOOVAERTS, M. J., 2006. Actuarial theory for dependent risks. Wiley.
- DENUIT, M., DHAENE, J., GOOVAERTS, M. J., KAAS, R., VYNCKE, D., 2002. The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory. *Insurance: Mathematics and Economics* 31(1), 3-33.
- DHAENE, J., GOOVAERTS, M. J., KAAS, R., TAN G, Q., VANDUFFEL, S., VYNCKE, D., 2004. Capital requirements, risk measures and comonotonicity. *Belgian Actuarial Bulletin* 4, 53-61.
- FISCHER, T., 2001. Examples of coherent risk measures depending on one-sided moments. Working paper, Darmstadt University of Technology.
- FÖLLMER, H., SCHIED, A., 2002. Robust preferences and convex measures of risk. In: *Advances in Finance and Stochastics*, K. Sandmann, P.J., Schönbucher, Springer, 39-56.
- GOURIEROUX, C., LAURENT, J.-P., SCAILLET, O., 2000. Sensitivity analysis of values at risk. *Journal of Empirical Finance* 7 (3-4), 225-245.
- GOURIEROUX, C., LIU, W., 2006a. Sensitivity analysis of distortion risk measures. Working paper.
- GOURIEROUX, C., LIU, W., 2006b. Efficient portfolio analysis using distortion risk measures. Working paper.
- HEYDE, C.C., KOU, S.G., PENG, X.H., 2006. What is a good risk measure: Bridging the gaps between data, coherent risk measures and insurance risk measures. Working paper, University of Columbia.
- JONES, B. L., ZITIKIS, R., 2003. Empirical estimation of risk measures and related quantities, *North American Actuarial Journal* 7 (4), 44-54.
- JOUINI, E., SCHACHERMAYER, W., TOUZI, N., 2006. Law invariant risk measures have the Fatou property. In: Kusuoka, S., Yamazaki, A. (Eds.), *Advances in Mathematical Economics* 9, 49-71.
- KALKBRENER, M., 2005. An axiomatic approach to capital allocation. *Mathematical Finance* 15 (3), 425-437.
- KROKHMAL, P., URYASEV, S., ZRAZHEVSKY, G., 2002. Risk management for hedge fund portfolios. *Journal of Alternative Investments* 5 (1), 10-29.
- KUSUOKA, S., 2001. On law invariant coherent risk measures. In: *Advances in Mathematical Economics* 3, 83-95.
- McFALL LAMM, R. Jr., 2003. Asymmetric returns and optimal hedge funds portfolios. *Journal of Alternative Investments* 6 (2), 9-21.
- ROCKAFELLAR, R.T., URYASEV, S., 2002. Conditional Value-at-Risk for general loss distributions, *Journal of Banking and Finance* 26 (7), 1443-1471.
- ROCKAFELLAR, R.T., URYASEV, S., ZABARANKIN, M., 2006. Generalized deviation in risk analysis. *Finance and Stochastics* 10, 51-74.

ROCKAFELLAR, R.T., URYASEV, S., ZABARANKIN, M., 2006. Master funds in portfolio analysis with general deviation measures. *Journal of Banking and Finance* 30, 743-778.

SCAILLET, O., 2004. Nonparametric estimation and sensitivity analysis of expected shortfall. *Mathematical Finance* 14, 115-129.

SCAILLET, O., 2005. Nonparametric estimation of conditional expected shortfall. *Revue Assurance et Gestion des Risques / Insurance and Risk Management Journal* 74, 639-660.

WIRCH, J. L., HARDY, M. R., 2000. Distortion risk measures: Coherence and stochastic dominance. Working paper, Heriot-Watt University.

WANG, S., 1995. Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. *Insurance: Mathematics and Economics* 17, 43-54.

WANG, S., 2001. A measure that goes beyond coherence. Working paper, ASA SCOR Reinsurance Co.

WANG, S., PANJER, H. H., YOUNG, V. R., 1997. Axiomatic characterization of insurance prices. *Insurance: Mathematics and Economics* 21 (2), 173-183.

YAARI, M.-E., 1987. The dual theory of choice under risk. *Econometrica* 55 (1), 95-115.

### Chapitre 7 – Mesures de risque et optimisation de portefeuille

ACERBI, C., SIMONETTI, P., 2002. Portfolio optimization with spectral measures of risk. Working paper, Abaxbank (Milano, Italy)

AGARWAL, V., NAIK, N.Y., 2001. Performance evaluation of hedge funds with option-based and buy-and-hold strategies. Working paper, London Business School.

AMIN, G.S., KAT, H.M., 2001. Hedge fund performance 1990-2000: Do the ‘money machines’ really add value? *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 38, 1-24.

ANDREANI, R., DUNDER, C., MARTINEZ, J.-M., 2003. Order-value optimization: Formulation and solution by means of a primal Cauchy method. *Mathematical Methods of Operations Research* 58 (3), 387–399.

ANDREANI, R., DUNDER, C., MARTINEZ, J.-M., 2005. Non-linear programming reformulation of the order-value optimization problem. *Mathematical Methods of Operations Research* 61 (3), 365–384.

BARES, P.-A., GIBSON, R., GYGER, S., 2001. Style consistency and survival probability in the hedge funds’ industry. Working paper, Zurich University.

BASSETT, G., KOENKER, R., KORDAS, G., 2004. Pessimistic portfolio allocation and Choquet expected utility. *Journal of Financial Econometrics* 2 (4), 477-492.

BERTSIMAS, D., LAUPRETE, T.J., SAMAROV, A., 2004. Shortfall as a risk measure: Properties, optimization and applications. *Journal of Economic Dynamics and Control* 28 (7), 1353–1381.

BONNEFOY, J., 2007. Rapport de stage de 2<sup>ème</sup> année. ENSAE (France).

BROWN, S.J., GOETZMANN, W.N., PARK, J., 1999. Conditions for survival: changing risk and the performance of hedge funds managers and CTAs. Working paper, New York Stern University.

DUARTE, A.M. Jr., 1999. Fast computation of efficient portfolios. *Journal of Risk* 1 (4), 71-94.

FAMA, E.F., FRENCH, K.R., 1993. Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of Financial Economics* 33, 3-56.

FUNG, W., HSIEH, D.A., 1997a. Empirical characteristics of dynamic trading strategies: The case of hedge funds. *Review of Financial Studies* 10 (2), 275-302.

FUNG, W., HSIEH, D.A., 1997b. Information content of performance track records: Investment style and survivorship bias in the historical returns of CTA. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 24 (1), 30-41.

FUNG, W., HSIEH, D.A., 2002. The risk in fixed-income hedge funds style. *Journal of Fixed Income* 12 (2), 6-27.

GILLI, M., KËLLEZI, E., 2000. A heuristic approach to portfolio optimization. Research Paper, University of Geneva (Suisse).

KONNO, H., WAKI, H., YUUKI, A., 2002. Portfolio optimization under lower partial risk measures. *Asia Pacific Financial Markets* 9, 127-140.

LAU, K., WOMERSLEY, R.S., 1996. Portfolio optimisation problems. In: May, R.L., Easton, A.K. (Eds.), *Computational techniques and applications: CTAC95*, Singapour, World Scientific Publishing, 795-802.

MARKOWITZ, H., 1952. Portfolio selection. *Journal of Finance* 7, 77-91.

MARKOWITZ, H., 1959. *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. Wiley.

MARKOWITZ, H., 1987. *Mean variance analysis in portfolio choice and capital markets*. Blackwell.

MLAIKI, M., 2005. Rapport de stage d'option scientifique. Ecole Polytechnique (France).

PALMQVIST, J., KROKHMAL, P., URYASEV, S., 1999. Portfolio optimization with conditional Value-at-Risk objective and constraints. *Journal of Risk* 4 (2), 21-41.

RABER, U., 1999. Non-convex all-quadratic global optimization problems : Solutions methods, application and related topics. PhD Dissertation, University of Trier (Germany).

ROCKAFELLAR, R.T., URYASEV, S., 2000. Optimization of conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk* 2 (3), 21-41.

SHARPE, W.F., 1992. Asset allocation: Management style and performance measurement. *Journal of Portfolio Management* 18, 7-19.

### **Partie III. Couverture des marges nettes de taux d'intérêt sur les ressources non échéancées.**

ADAM, A., LAURENT, J.-P. REBERIOUX, C., 2005. Hedging deposit accounts: a new perspective. *Banque et Marchés* 75, 28-43.

Central Bank of the Republic of Turkey. Financial stability report. May 2007.

CHABAANE, A., CHOUILLOU, A., LAURENT, J.-P., 2004. Aggregation and credit risk measurement in retail banking. *Banque et Marchés* 70, 5-15.

CHOUILLOU, A., 2005. Modélisation du risque de crédit en banque de détail avec application au calcul et à l'allocation de capital réglementaire et économique. Thèse de doctorat, Université d'Evry.

COX, J., HUANG, C., 1989. Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process. *Journal of Economic Theory* 49, 33-83.

DEMEY, P., FRACHOT, A., RIBOULET, G., 2003. Introduction à la gestion actif-passif bancaire. *Economica*.

- DUFFIE, D., RICHARDSON, H. R., 1991. Mean-variance hedging in continuous time. *The Annals of Applied Probability* 1 (1), 1-15.
- DÜLLMANN, K., SCHEULE, H., 2003. Determinants of the asset correlations of German corporations and implications for regulatory capital. *Banking and Financial Stability: workshop on Applied Banking Research, Banca d'Italia*.
- ELKENBRACHT, M., NAUTA, B.-J., 2006. Interest rate risk of interest-bearing transactions deposits. *Risk Magazine*, 82-87.
- ENGLISH, W., 2002. Interest rate risk and bank net interest margins. Bank for International Settlements, (<http://www.bis.org>)
- FABOZZI, F., 2007. *Fixed income analysis* (2<sup>nd</sup> edition). Wiley.
- FÖLLMER, H., SCHWEIZER, M., 1990. Hedging of contingent claims under incomplete information. In: M. H. A. Davis and R. J. Elliott (Eds), *Applied Stochastic Analysis*, Gordon Breach (London, UK).
- GORDY, M., LUTKEBOHMERT, E., 2007. Granularity adjustment for Basel II. *Deutsche Bundesbank Discussion Paper*.
- GOURIEROUX, C., LAURENT, J.-P., PHAM, H., 1998. Mean-variance hedging and numéraire. *Mathematical Finance* 8 (3), 179-200.
- HO, T.S.Y., SAUNDERS, A., 1981. The determinants of bank interest margins: Theory and empirical evidence. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 16, 581-600.
- HUTCHISON, D., 1995. Retail bank deposit pricing: An intertemporal asset pricing approach. *Journal of Money, Credit and Banking* 27, 217-231.
- HUTCHISON, D., PENNACCHI, G., 1996. Measuring rents and interest rate risk in imperfect financial markets: the case of retail bank deposits. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 31 (3), 399-417.
- JANOSI, T., JARROW, R., ZULLO, F., 1999. An empirical analysis of the Jarrow-van Deventer model for valuing non-maturity demand deposits. *Journal of Derivatives* (Fall), 8-31.
- JARROW, R., VAN DEVENTER, D., 1998. The arbitrage-free valuation and hedging of demand deposits and credit card loans. *Journal of Banking and Finance* 22, 249-272.
- KALKBRENER, M., WILLING, J., 2004. Risk management of non-maturing liabilities. *Journal of Banking and Finance* 28, 1547-1568.
- LAURENT, J.-P., PHAM, H., 1999. Dynamic programming and mean-variance hedging. *Finance and Stochastics* 3, 83-110.
- MAUDOS, J., FERNANDEZ DE GUEVARA, J., 2004. Factors explaining the interest margin in the banking sectors of the European Union. *Journal of Banking and Finance* 28 (9), 2259-2281.
- MOTLEY, B., 1988. Should M2 be redefined? *Federal Reserve Bank of San Francisco* (Winter) 33-51.
- O'BRIEN, J., 2000. Estimating the value and interest rate risk of interest-bearing transactions deposits. Division of Research and Statistics, Board of Governors, Federal Reserve System.
- Office of Thrift Supervision. *The net portfolio value model*. March 2000.
- PHAM, H., RHEINLÄNDER, T., SCHWEIZER, M., 1998. Mean-variance hedging for continuous processes – new proofs and examples. *Finance and Stochastics* 2, 173-198.
- POOLE, W., 1991. Congressional testimony before the subcommittee on domestic monetary policy of the committee on banking, finance and urban affairs. US House of Representatives.

SAUNDERS, A., SCHUMACHER, L., 2000. The determinants of interest rate margins: An international study. *Journal of International Money and Finance* 19, 813-832.

STANHOUSE, B., STOCK, D., 2004. The impact of prepayment risk and deposit withdrawal risk on the optimal intermediation margin. *Journal of Banking and Finance* 28, 1825-1843.

WONG, K.P., 1997. On the determinants of bank interest margins under credit and interest rate risks. *Journal of Banking and Finance* 21, 251-271.

# Annexes

## Annexe A : Propriétés et résultats de représentation des mesures de risque – Preuves.

### 1. Mesures de risque cohérentes et invariantes en loi : comparaison avec l'espérance de rendement.

**Proposition (Relation entre mesure de risque et espérance).** Pour une mesure de risque cohérente et invariante en loi (H1)-(H5)  $\rho$  et pour tout rendement aléatoire  $X$ , on a :

$$\rho(X) \geq -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = -\mathbf{E}[X].$$

*Preuve*

Dans cette preuve, toute mesure de probabilité (resp. rendement aléatoire) est assimilée au vecteur  $n$ -dimensionnel de ses poids (resp. valeurs) sur l'espace des possibles (qui est fini). Ainsi, toute considération topologique est naturellement associée à la topologie unique de  $\mathbf{R}^n$ .

D'après Artzner et al. (1998), nous pouvons associer à  $\rho$  un ensemble de mesures de probabilité  $\Pi$  tel que pour tout rendement aléatoire  $X$  :

$$\rho(X) = \sup \{ -\mathbf{E}^Q[X], Q \in \Pi \}.$$

Il est assez facile de montrer que  $\Pi$  peut être supposé fermé. A défaut, on peut considérer son adhérence dans  $\mathbf{R}^n$  : cela ne change pas la mesure de risque  $\rho$ . Comme  $\Pi$  est aussi borné dans  $\mathbf{R}^n$ , il est en fait compact. Cela signifie que pour tout rendement aléatoire  $X$ , la borne supérieure dans la représentation ci-dessus est atteinte pour une certaine mesure de probabilité de  $\Pi$ . On note donc  $\Pi_X \subset \Pi$  l'ensemble des mesures de probabilités vérifiant  $\forall Q \in \Pi_X, -\mathbf{E}^Q[X] = \rho(X)$  et l'appelons *ensemble des mesures maximales de  $X$* . Ainsi,  $\Pi$  peut être réduit à l'union de ces ensembles  $\bigcup_{X \in \mathbf{R}^n} \Pi_X$  sans changer la mesure.

Montrons alors que pour tout rendement aléatoire  $X$  et pour n'importe quelle de ces mesures maximales  $Q \in \Pi_X$ , on a  $\forall (i, j), (X(i) - X(j))(Q(i) - Q(j)) \geq 0$ , c'est-à-dire que les valeurs de  $Q$  et de  $X$  sont rangées dans le même ordre. En fait, cela est dû à la propriété d'invariance en loi. En effet, en supposant que ce n'est pas le cas, on peut sans problème construire une variable aléatoire de même loi que  $X$  en *permutant* les valeurs prises par  $X$  sur l'ensemble des possibles de manière à les ranger dans le même ordre que celles de  $Q$ . Effectuer une telle permutation conduit à une variable aléatoire de même loi, qui a pourtant une mesure de risque strictement supérieure, ce qui est impossible.

Ainsi, les valeurs prises par  $X$  et n'importe quel  $Q \in \Pi_X$  sont rangées dans le même ordre.

Cela implique que  $\rho(X) \geq -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = -\mathbf{E}[X]$ , ce qui achève la preuve. ■

## 2. Compatibilité de l'Expected Shortfall et des mesures spectrales de risque avec la dominance stochastique du second ordre.

Dans cette partie de l'annexe, nous allons démontrer les propriétés suivantes :

**Proposition (Compatibilité de l'ES et des mesures spectrales de risqué avec la SOSD):**

$$X \underset{SOSD}{\leq} Y \Leftrightarrow \text{pour tout } \alpha \in [0,1] \text{ on a } ES_\alpha(X) \geq ES_\alpha(Y)$$

and

$$X \underset{SOSD}{\leq} Y \Leftrightarrow \text{pour toute mesure spectrale } M_\phi \text{ on a } M_\phi(X) \geq M_\phi(Y).$$

*Preuve*

Etant donné que toute mesure spectrale de risque s'écrit comme une somme pondérée d'ES, il suffit de démontrer le premier résultat. Le second en découle immédiatement.

La preuve ci-dessous, en ce qui concerne le sens direct, est fortement inspirée de Denuit, Dhaene et Goovaerts (2006)

Notations: Nous notons la fonction de survie de  $X$  par  $\overline{F}_X(u) = 1 - F_X(u)$ , sachant que  $F_X$  est sa fonction de répartition, qui est càdlàg.

Sens direct  $\Rightarrow$

Supposons que  $X \underset{SOSD}{\leq} Y$ . Nous utilisons alors la caractérisation de la SOSD par des fonctions d'utilité, pour le cas particulier des fonction *stop loss*  $t \mapsto -(a-t)^+$ , pour tout  $a \in \mathbb{R}$ . Ainsi, la SOSD implique que pour tout  $b \in \mathbb{R}$ , on a  $\mathbf{E}[(a-X)^+] \geq \mathbf{E}[(a-Y)^+]$ .

Soit alors  $p \in ]0;1]$ . L'ES de  $X$  au seuil de probabilité  $p$  peut alors être exprimée par  $\sup_{a \in \mathbb{R}} \left\{ -b + \frac{1}{p} \mathbf{E}[(b-X)^+] \right\}$  et que la borne supérieure est atteinte pour  $b = VaR_p(X)$ .

Sachant cela, la preuve devient immédiate :

$$\begin{aligned} ES_p[X] &= \sup_{b \in \mathbb{R}} \left\{ -b + \frac{1}{p} \mathbf{E}[(b-X)^+] \right\} \geq -VaR_p(Y) + \frac{1}{p} \mathbf{E}[(VaR_p(Y)-X)^+] \\ &\geq -VaR_p(Y) + \frac{1}{p} \mathbf{E}[(VaR_p(Y)-Y)^+] = ES_p[Y] \end{aligned}$$

ainsi pour tout seuil  $p \in ]0;1]$  on a  $ES_p[X] \geq ES_p[Y]$ .

Sens rétrograde  $\Leftarrow$

Pour cette partie de la preuve, nous faisons appel à la théorie de l'intégration des fonctions positives et des pseudo-inverses développée par exemple dans Denneberg (1994).

Supposons que  $ES_\alpha(X) \geq ES_\alpha(Y)$  pour tout seuil  $\alpha \in ]0;1]$  et montrons que  $X \underset{SOSD}{\leq} Y$ , ou,

de manière équivalente, que  $\forall t \in \mathbb{R}, \int_t^{+\infty} \overline{F}_Y(u) du \geq \int_t^{+\infty} \overline{F}_X(u) du$ .

**Première étape**

Celle-ci consiste à établir l'identité  $\int_x^{+\infty} \overline{F}_X(u) du = \int_{F_X(x)}^1 F_X^{-1}(p) dp - x \overline{F}_X(x)$ .

Pour nous placer dans le cadre de Denneberg (1994), nous considérons  $x \in \mathbb{R}$  et la fonction suivante:

$$\begin{aligned} \overline{F}_X^x : [0, +\infty[ &\rightarrow [0, +\infty[ \\ u &\mapsto \overline{F}_X[u + x] \end{aligned}$$

Cette fonction est positive et décroissante. Ainsi, on peut considérer un de ses pseudo-inverses :

$$\begin{aligned} \overline{F}_X^x{}^{-1} : [0, +\infty[ &\rightarrow [0, +\infty[ \\ p &\mapsto 0 \vee \sup \left\{ u \mid \overline{F}_X^x(u) > p \right\} \end{aligned}$$

où  $a \vee b$  désigne  $\max(a, b)$ , selon la notation habituelle.

D'après Denneberg (1994), on a alors  $\int_0^{+\infty} \overline{F}_X^x(u) du = \int_0^{+\infty} \overline{F}_X^x{}^{-1}(p) dp$ .

D'autre part, la fonction  $\overline{F}_X^x{}^{-1}$  est liée à la fonction de quantile  $F_X^{-1}$ , comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \overline{F}_X^x{}^{-1}(p) &= 0 \vee \sup \left\{ u \mid \overline{F}_X^x(u) > p \right\} \\ &= 0 \vee \sup \left\{ u \mid \overline{F}_X(u + x) > p \right\} \\ &= 0 \vee \sup \left\{ u \mid F_X(u + x) < 1 - p \right\} \\ &= 0 \vee \left[ -x + \sup \left\{ u \mid F_X(u) < 1 - p \right\} \right] \end{aligned}$$

et comme  $\sup \left\{ u \mid F_X(u) < 1 - p \right\} = \inf \left\{ u \mid F_X(u) \geq 1 - p \right\} = F_X^{-1}(1 - p)$ , alors on a :

$$\overline{F}_X^x{}^{-1}(p) = 0 \vee \left[ F_X^{-1}(1 - p) - x \right].$$

Ceci nous montre que

$$\int_0^{+\infty} \overline{F}_X^x{}^{-1}(u) du = \int_0^{F_X(x)} \left[ F_X^{-1}(1 - p) - x \right] dp = -x \overline{F}_X(x) + \int_{F_X(x)}^1 F_X^{-1}(p) dp$$

étant donné que  $\theta$  prédomine dans l'expression ci-dessus dès que  $p < \overline{F_X}(x)$ .

D'autre part, on a :

$$\int_0^{+\infty} \overline{F_X^x}(u) du = \int_0^{+\infty} \overline{F_X}[u+x] du = \int_x^{+\infty} \overline{F_X}(u) du .$$

En revenant à l'égalité des intégrales de la fonction et de son pseudo-inverse, cela donne :

$$\int_x^{+\infty} \overline{F_X}(u) du = -x\overline{F_X}(x) + \int_{F_X(x)}^1 F_X^{-1}(p) dp ,$$

ce que nous cherchions.

### Deuxième étape

Revenons à  $ES_\alpha(X) \geq ES_\alpha(Y)$  pour tout seuil de probabilité  $\alpha$ . Ainsi, pour tout  $\alpha \in ]0,1[$ ,

cela donne  $-\int_0^\alpha F_X^{-1}(p) dp \geq -\int_0^\alpha F_Y^{-1}(p) dp$ , ou, de manière équivalente,

$$\int_{1-\alpha}^1 F_X^{-1}(p) dp \geq \int_{1-\alpha}^1 F_Y^{-1}(p) dp .$$

Supposons tout d'abord que  $F_X(x) \leq F_Y(x)$ . Alors :

$$\int_x^{+\infty} [\overline{F_Y}(u) - \overline{F_X}(u)] du = \int_{F_X(x)}^1 [F_Y^{-1}(p) - F_X^{-1}(p)] dp + \int_{F_X(x)}^{F_Y(x)} [x - F_Y^{-1}(p)] dp .$$

Le premier terme est positif ; le second l'est également car :

$$\forall p \in [F_X(x), F_Y(x)], F_Y^{-1}(p) \leq F_Y^{-1}(F_Y(x)) = \inf\{u \mid F_Y(u) \geq F_Y(x)\} \leq x .$$

$$\text{Donc, } \int_x^{+\infty} [\overline{F_Y}(u) - \overline{F_X}(u)] du \geq 0 .$$

Supposons à présent que  $F_X(x) > F_Y(x)$ . Comme la fonction de répartition est càdlàg, la fonction de survie l'est également. Si on suppose que  $\overline{F_Y}(t) > \overline{F_X}(t)$  pour tout  $t \geq x$ , alors on

$$\text{a évidemment } \int_x^{+\infty} [\overline{F_Y}(u) - \overline{F_X}(u)] du \geq 0 .$$

Sinon, supposons qu'il existe  $x_0 \geq x$  tel que  $\overline{F_Y}(x_0) \leq \overline{F_X}(x_0)$ . Alors nécessairement  $x_0 > x$ .

Considérons alors  $\bar{x} = \inf\{t \geq x \mid \overline{F_Y}(t) \leq \overline{F_X}(t)\}$ . En particulier,  $\forall t \in [x, \bar{x}] \overline{F_Y}(t) \geq \overline{F_X}(t)$ , ce qui

$$\text{implique } \int_x^{\bar{x}} \overline{F_Y}(t) dt \geq \int_x^{\bar{x}} \overline{F_X}(t) dt .$$

D'autre part, on sait que  $\overline{F_Y}(x) \leq \overline{F_X}(x)$  puisque  $\overline{F_Y} - \overline{F_X}$  est continue à droite. Ainsi, d'après la démonstration dans le cas précédent ( $F_X(x) \leq F_Y(x)$ ), on a  $\int_x^{+\infty} \overline{F_Y}(t) dt \geq \int_x^{+\infty} \overline{F_X}(t) dt$ . Ainsi,  $\int_x^{+\infty} \overline{F_Y}(t) dt \geq \int_x^{+\infty} \overline{F_X}(t) dt$ , ce qui conclut la preuve. ■

### 3. Représentation par scénarios généralisés des mesures spectrales de risque

Nous démontrons ce résultat dans le cas de l'Expected Shortfall. Le cas des mesures spectrales de risque est très similaire.

**Proposition (Représentation par scénarios généralisés de l'Expected Shortfall de niveau  $\alpha$ ) :** Pour toute permutation  $\sigma$  de l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  on définit  $P_\alpha^\sigma$  comme dans la section 3 du Chapitre 6 :

$$\begin{cases} \forall 1 \leq k \leq [n\alpha], P_\alpha^\sigma(\omega_{\sigma(k)}) = \frac{1}{n\alpha} \\ P_\alpha^\sigma(\omega_{\sigma([n\alpha]+1)}) = \frac{n\alpha - [n\alpha]}{n\alpha} \\ \forall ([n\alpha] + 2) \leq k \leq n, P_\alpha^\sigma(\omega_{\sigma(k)}) = 0 \end{cases} .$$

On pose ensuite  $\Pi_\alpha = \{P_\alpha^\sigma, \sigma \in \mathbf{S}_n\}$ , où  $\mathbf{S}_n$  est l'ensemble des permutation de  $\{1, \dots, n\}$ .

Avec ces notations, on a alors :

$$ES_\alpha(X) = \sup \{ \mathbf{E}^P[X], P \in \Pi_\alpha \}.$$

De plus, pour tout rendement aléatoire  $X$ , la borne supérieure est atteinte pour la permutation  $\sigma_X$  telle que  $X(\omega_{\sigma_X(1)}) \leq X(\omega_{\sigma_X(2)}) \leq \dots \leq X(\omega_{\sigma_X(n)})$ .

*Preuve*

Dans le cas de l'ES de niveau  $\alpha$ , on a  $ES_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F_X^{-1}(\alpha) d\alpha$ . Sous notre hypothèse de

finitude de l'espace des événements  $\Omega$ , le rendement aléatoire  $X$  prend un nombre fini de valeurs qui peut être ordonné  $x_{1:n} \leq x_{2:n} \leq \dots \leq x_{n:n}$ . On définit alors les événements  $(\omega_{1:n}; \dots; \omega_{n:n})$  tels que  $X(\omega_{1:n}) = x_{1:n}; \dots; X(\omega_{n:n}) = x_{n:n}$ .

Ainsi, en notant  $\sigma(X)$  une telle permutation, l'ES peut être exprimée également de la façon suivante :

$$ES_\alpha[X] = -\mathbf{E}^{P_\alpha^{\sigma(X)}}[X].$$

Dans la proposition, nous affirmons que calculer l'ES de  $X$  revient à trouver une permutation qui maximise  $-\mathbf{E}^{P_\alpha^\sigma}[X]$  et que le maximum est atteint pour une « permutation d'ordre »  $\sigma(X)$ . Montrons cela.

Pour tout couple d'indices  $(i, j)$  vérifiant  $1 \leq i \leq j \leq n$ , on a :

$$P_\alpha(\omega_i)x_{j:n} + P_\alpha(\omega_j)x_{i:n} \geq P_\alpha(\omega_i)x_{i:n} + P_\alpha(\omega_j)x_{j:n},$$

car  $P_\alpha(\omega_1) \geq \dots \geq P_\alpha(\omega_n)$  (en notant  $P_\alpha = P_\alpha^{id}$ ).

Par ailleurs, on remarque que  $\mathbf{E}^{P_\alpha^\sigma}[X] = \sum_{k=1}^n P_\alpha(\omega_k)x_{\sigma(k)}$ . Cela signifie que chaque fois

qu'on inverse deux indices dans la permutation d'ordre, on obtient une valeur moins élevée pour l'espérance ci-dessus. On peut généraliser ce fait à l'application d'un cycle à la permutation d'ordre. Comme toute permutation se décompose en cycles de supports deux-à-deux disjoints, cela montre que le maximum dans l'espérance ci-dessus est atteint pour la permutation d'ordre.

Finalement :

$$ES_\alpha(X) = \max\left\{-\mathbf{E}^{P_\alpha^\sigma}[X] \mid \sigma \in \mathbf{S}_n\right\}$$

et

$$\sigma_X \in \text{Arg max}\left\{-\mathbf{E}^{P_\alpha^\sigma}[X] \mid \sigma \in \mathbf{S}_n\right\}.$$

■

## Annexe B : Stratégies admissibles, *Hedging Numéraire* et résolution des programmes d'optimisation statique et dynamique (Partie III)

### 1. *Hedging Numéraire* et mesure de probabilité variance minimale

#### a. Notations générales

##### Mesures de probabilité

On définit les deux ensembles de mesures suivants, en liaison avec le processus de diffusion du Libor *forward* :

$$\Pi_2^{ac} = \left\{ \mathbf{Q} \ll \mathbf{P} \mid \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^2(\mathbf{P}), L \text{ est une } \mathbf{Q} - \text{martingale locale} \right\}$$

et

$$\Pi_2^e = \left\{ \mathbf{Q} \approx \mathbf{P} \mid \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \in L^2(\mathbf{P}), L \text{ est une } \mathbf{Q} - \text{martingale locale} \right\}$$

où  $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$  signifie que  $\mathbf{Q}$  est absolument continue par rapport à  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q} \approx \mathbf{P}$  signifie que  $\mathbf{Q}$  et  $\mathbf{P}$  sont des mesures de probabilité équivalentes.

##### Ensemble des stratégies admissibles

Nous précisons ici la définition de la condition d'admissibilité introduite dans le corps de cette thèse, présente dans Gouriéroux, Laurent et Pham (1998). L'ensemble  $\Theta$  des stratégies admissibles se définit à l'aide des deux propriétés suivantes :

- $\forall \theta \in \Theta, \int_0^T \theta(u) dL_u \in L^2(\mathbf{P})$  ;
- $\forall \theta \in \Theta, \forall \mathbf{Q} \in \Pi_2^{ac}$ , le processus  $\int_0^{(\cdot)} \theta(u) dL(u)$  est une  $\mathbf{Q}$  - martingale.

#### b. Changement de numéraire : extension artificielle de l'ensemble des actifs négociables

##### Définition des numéraires

Nous allons préciser dans cette sous-section ce que nous entendons par "extension artificielle". Tout portefeuille autofinancé associé à une stratégie admissible (cf. ci-dessus), a

un processus de valeur  $V = (V_t)_{0 \leq t \leq T}$  tel que  $V_t(\theta) = V_0 + \int_0^t \theta_u dL_u$ . Nous pouvons alors définir

$a_t = -\frac{\theta_t}{V_t(x, \theta)}$  et il suffit pour cela que le processus  $V(\theta)$  soit  $\mathbf{P}$ -presque sûrement strictement positif à chaque date  $t$ . Nous pouvons alors normaliser le portefeuille  $V(\theta)$  par rapport à sa valeur initiale  $V_0$ , dès lors que celle-ci est non nulle, et poser  $\forall 0 \leq t \leq T, V_t(\theta) = V_0 V_t^a(\theta)$ .

Le processus  $V^a(\theta)$  ainsi défini, est appelé *numéraire* et on peut alors l'ajouter « artificiellement » au vecteur d'actifs négociables  $X = (1, L)$ . Dans notre cadre, un numéraire est en fait un portefeuille basé sur une stratégie admissible  $\theta \in \Theta$ , de valeur strictement positive  $\mathbf{P}$ -presque sûrement à tout instant et de valeur initiale égale à 1.

Pour ne pas le confondre avec un portefeuille quelconque, nous le notons désormais  $N^a$  et nous introduisons alors l'extension du vecteur composé des actifs négociables déflatés du numéraire en posant  $(1, X^a) = \left(1, \frac{1}{N^a}, \frac{L}{N^a}\right)$ .

### De nouveaux ensembles de mesures de probabilité

Soit un numéraire  $N^a$  défini comme ci-dessus. Nous pouvons adapter les ensembles de mesures définis plus haut, en posant :

$$\Pi_2^{ac}(a) = \left\{ \mathbf{Q}(a) \ll \mathbf{P} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N_T^a} \frac{d\mathbf{Q}(a)}{d\mathbf{P}} \in L^2(\mathbf{P}), \frac{1}{N^a} \text{ est une } \mathbf{Q}(a) \text{ - martingale,} \\ \frac{L}{N^a} \text{ est une } \mathbf{Q}(a) \text{ - martingale locale} \end{array} \right. \right\}$$

et

$$\Pi_2^e(a) = \left\{ \mathbf{Q}(a) \approx \mathbf{P} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{N_T^a} \frac{d\mathbf{Q}(a)}{d\mathbf{P}} \in L^2(\mathbf{P}), \frac{1}{N^a} \text{ est une } \mathbf{Q}(a) \text{ - martingale,} \\ \frac{L}{N^a} \text{ est une } \mathbf{Q}(a) \text{ - martingale locale} \end{array} \right. \right\}.$$

### Adaptation des stratégies de couverture

Toujours dans le nouveau numéraire, nous considérons des portefeuilles dont le processus de valeur est lié à une stratégie d'investissement dynamique  $\phi(a) = (\eta(a), \theta(a))$  dans la famille d'actifs négociables  $X^a = \left(\frac{1}{N^a}, \frac{L}{N^a}\right)$ .

Un portefeuille  $(V, \phi(a))$  est autofinancé, par rapport au nouveau vecteur d'actifs négociables, si :

- $\phi(a) \in \Phi(a)$  l'ensemble des processus prévisibles intégrables par rapport à  $X^a$  tels que  $N_T^a \int_0^T \phi_u(a)' dX_u^a \in L^2(\mathbf{P})$  et, pour tout  $\mathbf{Q}(a) \in \Pi_2^{ac}(a)$ , le processus  $\int_0^{(\cdot)} \phi_u(a)' dX_u^a$  est une  $\mathbf{Q}(a)$ -martingale;
- $V$  est un processus  $F$ -adapté tel que  $V_t = N_t^a \left( V_0 + \int_0^t \phi_u(a)' dX_u^a \right)$ .

### Relations de correspondance

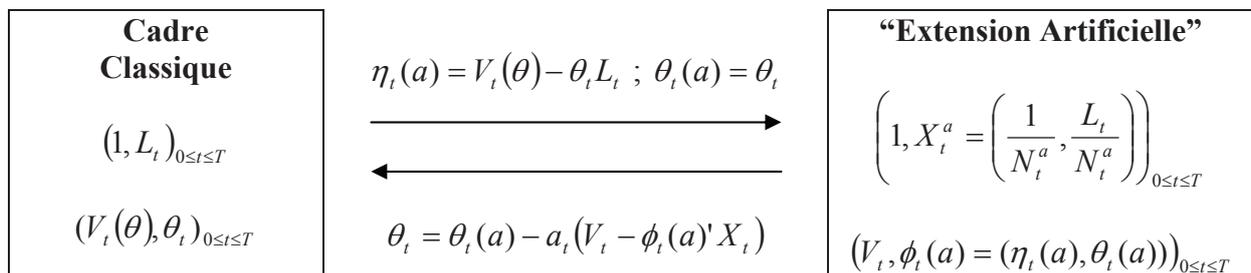
Gouriéroux, Laurent et Pham (1998) montrent que les ensembles  $\Pi_2^{ac}(a)$  et  $\Pi_2^{ac}$  d'une part, et  $\Pi_2^e(a)$  et  $\Pi_2^e$  d'autre part, sont en bijection et liés par une relation simple que nous explicitons ci-dessous. Cela implique également une relation entre les stratégies auto-financées définies dans chacun des deux cas.

La relation entre  $\Pi_2^{ac}(a)$  et  $\Pi_2^{ac}$  s'énonce comme suit :

$$\mathbf{Q}(a) \in \Pi_2^{ac}(a) \Leftrightarrow \exists \mathbf{Q} \in \Pi_2^{ac} : \frac{d\mathbf{Q}(a)}{d\mathbf{P}} = N_T^a \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}.$$

La relation d'équivalence entre  $\Pi_2^e(a)$  et  $\Pi_2^e$  est similaire.

Enfin, le lien entre les stratégies d'investissement se représente de la façon suivante:



Les formules de correspondance ci-dessus laissent le processus de valeur des portefeuilles auto-financés inchangé. L'ensemble des « actifs atteignables », c'est-à-dire des *payoffs* répliqués par des portefeuilles basés sur des stratégies autofinancées, reste donc le même, qu'on change de numéraire ou non<sup>44</sup>.

### **c. Hedging Numéraire et mesure de probabilité variance minimale**

#### Définition

Parmi les numéraires que nous venons de définir, nous portons notre attention tout particulièrement sur celui qui suit.

<sup>44</sup> Cette propriété est appelée *Invariance of Investment Opportunity Set* dans Gouriéroux, Laurent et Pham (1998).

**Définition (Hedging Numéraire) :** Le *Hedging Numéraire* est le processus de valeur correspondant à la stratégie solution du problème suivant :

$$\min_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [V_T(1, \theta)]^2 \text{ où } V_T(1, \theta) = 1 + \int_0^T \theta_t dL_t .$$

Dorénavant, nous le noterons simplement  $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$  et lui associons naturellement le processus  $a^{HN}$  défini par  $\frac{dN_t}{N_t} = -a_t^{HN} dL_t$ .

Le Théorème 4.2 de Gouriéroux, Laurent et Pham (1998) montre que le processus de *Hedging Numéraire* est strictement positif à chaque date,  $\mathbf{P}$ -presque sûrement. Ceci assure donc que le *Hedging Numéraire* est bien un numéraire au sens où nous le définissons plus haut dans cette annexe.

Problème dual – Mesure de probabilité variance minimale

**Définition (Mesure de probabilité variance minimale) :** La mesure de probabilité variance minimale est la mesure de probabilité solution du problème quadratique suivant :

$$\min_{\mathbf{Q} \in \Pi_2^{ac}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} \right]^2 .$$

Nous notons cette mesure de probabilité  $\bar{\mathbf{P}}$ .

Le Théorème 4.1 de Gouriéroux et al. (1998), complété par le Théorème 4.2, énonce alors un résultat d'équivalence entre le *Hedging Numéraire* et la mesure de probabilité variance minimale.

**Théorème (Equivalence entre Hedging Numéraire et mesure de probabilité variance minimale, Gouriéroux et al. (1998)) :** La mesure de probabilité variance minimale et le *Hedging Numéraire* sont liés par la relation suivante :

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right]^2 N_T .$$

De plus, on a  $\bar{\mathbf{P}} \in \Pi_2^e$ .

Nous redéfinissons dès lors toutes les notions introduites quant à l'« extension artificielle » par rapport au *Hedging Numéraire*.  $\Pi_2^{ac}(a^{HN})$ ,  $\Phi(a^{HN})$ , etc. sont alors tous définis à partir de celui-ci.

Ainsi la mesure de probabilité de  $\Pi_2^e(a^{HN})$  correspondant à  $\bar{\mathbf{P}}$  est notée  $\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})$  et sa densité est donnée par la relation suivante :

$$\frac{d\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})}{d\mathbf{P}} = N_T \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} = \frac{N_T^2}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}[N_T^2]} .$$

## 2. Optimisation statique moyenne-variance – Détermination des stratégies optimales

### a. Préambule : Portefeuille autofinancé et stratégie en FRAs

Dans ce préambule, nous proposons de montrer en quoi, pour une stratégie admissible  $\theta \in \Theta$  la valeur finale du portefeuille autofinancé associé correspond à une stratégie dynamique d'investissement en FRAs.

Par absence d'opportunité d'arbitrage, le taux convenu à la date de signature d'un FRA est l'estimation *forward* du taux final, vu de cette date. Ainsi, le *payoff* à la date finale d'un FRA contracté à la date  $t$  pour la période  $[T; T + \delta]$  et de nominal  $N$  s'écrit  $N \cdot \delta T \cdot (L_t - L_T)$ .

Soit  $\theta \in \Theta$  une stratégie admissible et considérons qu'à chaque date  $t$ , on investit le montant infinitésimal  $d\theta_t$  en « nouveaux FRAs » par rapport à la date « précédente ». La valeur à terme du portefeuille ainsi constitué s'écrit alors de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \theta_0 \cdot \delta T \cdot (L_0 - L_T) + \int_0^T (L_t - L_T) \cdot \delta T \cdot d\theta_t &= \theta_0 \cdot \delta T \cdot (L_0 - L_T) - (\theta_T - \theta_0) \cdot \delta T \cdot L_T + \int_0^T \delta T \cdot L_t d\theta_t \\ &= \theta_0 \delta T \cdot L_0 - \theta_T \cdot \delta T \cdot L_T + \delta T \cdot \int_0^T L_t d\theta_t \\ &= -\delta T \cdot \int_0^T \theta_t dL_t \end{aligned}$$

### a. Projection sur $H_{S1}$

Nous rappelons le programme à résoudre :

$$\min_{\theta \in \mathbb{R}} \text{Var}^P [MNI(T) - \theta(L_T - L_0)].$$

Il est immédiat que la solution de ce programme est donnée par  $\theta_{S1}^* = \frac{\text{Cov}^P[MNI(T), L_T]}{\text{Var}^P[L_T]}$ .

### b. Projection sur $H_{S2}$

Le programme et sa solution sont énoncés dans la proposition ci-dessous.

**Proposition (projection sur  $H_{S2}$ ) :** La solution au programme d'optimisation

$\min_{\varphi} \text{Var}^P [MNI(T) - \varphi(L_T)]$  s.c.  $\mathbf{E}^{\bar{P}}[\varphi(L_T)] = 0$  est donnée par :

$$\varphi_{S2}^*(x) = \mathbf{E}^P [MNI(T) | L_T = x] - \mathbf{E}^{\bar{P}} [MNI(T)]$$

*Preuve*

Pour résoudre ce problème, nous proposons de trouver la solution  $\varphi_m^*$  du problème contraint  $\min_f \text{Var}^P [MNI(T) - f(L_T)]$  s.c.  $\mathbf{E}^{\bar{P}}[f(L_T)] = 0$  et  $\mathbf{E}^P [MNI(T) - f(L_T)] = m$ , puis de résoudre  $\min_m \text{Var}^P [MNI(T) - \varphi_m^*(L_T)]$ .

Le problème contraint est donc équivalent au problème suivant :

$$\min_{f, \lambda, \mu} \Gamma(f, \lambda, \mu) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - f(L_T)]^2 + \lambda \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} f(L_T) \right] + \mu \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - f(L_T) - m]$$

qui donne:

$$\begin{cases} \varphi_m^*(L_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T)|L_T] - \frac{\lambda}{2} \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} + \frac{\mu}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right]^2 + \frac{\mu}{2} = -\mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)] \\ -\frac{\lambda}{2} + \frac{\mu}{2} = -m \end{cases} .$$

Ainsi :

$$\varphi_m^*(L_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T)|L_T] + \frac{m - \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} \right]^2 - 1} \left( \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} - 1 \right) - m .$$

Enfin, en résolvant le programme  $\min_m \mathbf{Var}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - \varphi_m^*(L_T)]$  on obtient :

$$m^* = \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)] \text{ et } \varphi_{S_2}^*(L_T) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T)|L_T] - \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)],$$

ce qui achève la preuve. ■

Considérons à présent l'ensemble plus large des stratégies dynamiques admissibles adaptées par rapport à la filtration engendrée par le processus de Libor forward et les portefeuilles autofinancés associés :

$$H_{S_2}^* = \left\{ \int_0^T \theta_t dL_t \mid \theta \in \Theta, \theta F^L - \text{adapté} \right\} .$$

On a clairement  $H_{S_2} \subset H_{S_2}^*$ . La proposition suivante montre que, dans notre modèle, la minimisation de la variance sur  $H_{S_2}^*$  revient à la même minimisation sur  $H_{S_2}$ .

**Proposition (Equivalence de la projection sur  $H_{S_2}^*$  et sur  $H_{S_2}$ ).** On a :

$$\min_{S \in H_{S_2}^*} \mathbf{Var}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - S] = \min_{S \in H_{S_2}} \mathbf{Var}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - S].$$

*Preuve*

En ajoutant la même contrainte de rendement que dans la démonstration ci-dessus, en considérant le Lagrangien et pour tout payoff  $S \in H_{S_2}^*$  on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma(S, \lambda, \mu) &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[MNI(T) - S]^2 + \lambda \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} S \right] + \mu \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - S - m] \\
&= \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ MNI(T) - \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) | F^L] \right]^2 + \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) | F^L] - S \right]^2 \\
&\quad + \lambda \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\mathbf{P}} S \right] + \mu \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) | F^L] - S - m \right]
\end{aligned}$$

Or, dans notre modèle,  $\mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) | F^L] = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) | L_T]$ , qui est une fonction de  $L_T$ . Le premier terme du Lagrangien étant indépendant du choix de  $S, \lambda, \mu$ , le résultat est immédiat. ■

### 3. Optimisation dynamique moyenne-variance – Détermination de la stratégie optimale

#### a. Deux programmes d'optimisation très proches.

Considérons les deux problèmes suivants :

**Problème A (Minimisation de la variance du résultat avec contrainte de rendement)**

$$\min_{\theta \in \Theta(m)} \mathbf{Var}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(0, \theta)],$$

où  $\Theta(m) = \{\theta \in \Theta | \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(0, \theta)] = m\}$  et  $m \in \mathbb{R}$  est fixé.

**Problème B (Minimisation quadratique de la marge, avec investissement initial)**

$$\min_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2,$$

où  $x \in \mathbb{R}$  est fixé.

**Proposition :** Si  $\theta^*(x) \in \Theta$  est solution du programme B, alors  $\theta^*(x)$  est solution du programme A pour le niveau d'espérance  $m^* = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(0, \theta^*(x))]$ .

*Preuve*

Cette proposition s'inspire fortement du Lemme 4.3 de Duffie et Richardson (1991).

Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $\theta^*(x) \in \Theta$  solution du programme B. On pose alors  $m^* = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(0, \theta^*(x))]$ . Soit enfin  $\theta \in \Theta(m^*)$ . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(0, \theta)] &= \mathbf{Var}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)] = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2 - (m^* - x)^2 \\
&\geq \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta^*(x))]^2 - (m^* - x)^2 = \mathbf{Var}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(0, \theta^*(x))]
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. ■

#### b. Détermination de la stratégie optimale pour le problème B.

Notre volonté ici est de résoudre le Problème B pour une valeur de  $x$  fixée. Le théorème et la preuve qui suivent scellent ce résultat.

**Théorème : (Détermination de la stratégie optimale pour la minimisation quadratique)**

Soit un niveau d'investissement initial  $x$  quelconque. La stratégie  $\theta^*(x) = (\theta_t^*(x))_{0 \leq t \leq T}$  solution du problème  $\min_{\theta \in \Theta} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2$  est donnée par :

$$\theta_t^*(x) = \frac{\partial \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]}{\partial L_t} + a_t^{HN} [\mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)] - V_t(x, \theta^*)],$$

où, conformément aux notations déjà introduites :

$$(a_t^{HN})_{0 \leq t \leq T} \text{ est défini par rapport au Hedging Numéraire } (N_t)_{0 \leq t \leq T} \text{ par } a_t^{HN} = -\frac{1}{N_t} \frac{\partial N_t}{\partial L_t};$$

$\bar{\mathbf{P}}$  est la mesure de probabilité variance minimale.

*Preuve*

**Cas particulier – si  $\mathbf{P}$  est une mesure de probabilité risque neutre**

Ce cas constitue le cadre de travail dans Adam, Laurent et Rebérioux (2005). Sous cette hypothèse forte, on a  $\mu_L = 0$  et la dynamique du Libor *forward* s'écrit

$$\frac{dL_t}{L_t} = \sigma_L dW_L(t).$$

Ainsi, le processus  $L$  est une  $\mathbf{P}$ -martingale locale. Par conséquent, le Théorème de décomposition de Kunita-Watanabe de la variable aléatoire  $MNI(T)$  dit qu'il existe un

processus  $F$ -adapté réel  $\theta^{MNI}$  tel que le processus  $\left( \int_0^t \theta_u^{MNI} dL_u \right)_{0 \leq t \leq T}$  soit de carré sommable

sous  $\mathbf{P}$  et une  $\mathbf{P}$ -martingale locale  $R^{MNI} = (R_t^{MNI})_{0 \leq t \leq T}$  indépendante de la filtration  $F^L$ , tels que :

$$MNI(T) = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T)] + \int_0^T \theta_t^{MNI} dL(t) + R_T^{MNI}.$$

Ainsi, pour tout  $\theta \in \Theta$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2 &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \left( \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T)] - x \right) + \int_0^T (\theta_t^{MNI} - \theta_t) dL_t + R_T^{MNI} \right]^2 \\ &= \left( \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T)] - x \right)^2 + \int_0^T (\theta_t^{MNI} - \theta_t)^2 \sigma_L^2 L_t^2 dt + \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [R_T^{MNI}]^2 \end{aligned}$$

La stratégie solution  $\theta^*(x)$  est donc indépendante de  $x$  et on la détermine à partir de la décomposition de Kunita-Watanabe de  $MNI(T)$  puisque  $\theta^*(x) = \theta^{MNI}$ .

Plus précisément, comme nous écrirons plus loin, l'observation de ladite décomposition nous permet de donner une expression plus « explicite » de la stratégie optimale, sous la forme suivante :

$$\forall 0 \leq t \leq T, \theta_t^*(x) = \theta_t^{MNI} = \frac{\partial}{\partial L_t} \mathbf{E}_t^{\mathbf{P}} [MNI(T)].$$

### Cas général - P n'est plus forcément une mesure de probabilité risque neutre

Dans ce cas, on n'a plus  $\mu_L = 0$  mais on va se ramener au cas précédent en adoptant un changement de numéraire, à l'aide justement du *Hedging Numéraire* défini précédemment.

Toujours à  $x$  fixé, soit  $\theta \in \Theta$ . On considère alors la stratégie  $\phi(a^{HN})$  qui correspond à  $\theta$ , sous le *Hedging Numéraire*. On a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2 &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ MNI(T) - N_T \left( x + \int_0^T \phi_u(a^{HN})' dX_u(a^{HN}) \right) \right]^2 \\ &= \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} - \left( x + \int_0^T \phi_u(a^{HN})' dX_u(a^{HN}) \right) \right]^2 \times \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[N_T^2] \end{aligned}$$

d'après l'expression de la densité de  $\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})$  par rapport à  $\mathbf{P}$ .

Ainsi on cherche à résoudre  $\min_{\phi(a^{HN}) \in \Phi(a^{HN})} \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} - \left( x + \int_0^T \phi_u(a^{HN})' dX_u(a^{HN}) \right) \right]^2$ , tout en

sachant que le processus bidimensionnel  $X(a^{HN})$  est une  $\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})$ -martingale locale. Toujours d'après le Théorème de décomposition de Kunita-Watanabe, il existe un processus  $F$ -adapté

réel  $\phi^{MNI}(a^{HN})$  tel que le processus  $\left( \int_0^t \phi_u^{MNI}(a^{HN})' dX_u(a^{HN}) \right)_{0 \leq t \leq T}$  soit de carré sommable sous

$\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})$  et une  $\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})$ -martingale locale  $R^{MNI}(a^{HN}) = (R_t^{MNI}(a^{HN}))_{0 \leq t \leq T}$  indépendante de la filtration  $F^L$ , tels que :

$$\frac{MNI(T)}{N_T} = \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} \right] + \int_0^T \phi_t^{MNI}(a^{HN})' dX_t(a^{HN}) + R_T^{MNI}(a^{HN}).$$

Ainsi, la stratégie optimale sous *Hedging Numéraire* est

$$\phi^*(a^{HN}) = \phi^{MNI}(a^{HN}) = (\eta^{MNI}(a^{HN}), \theta^{MNI}(a^{HN})).$$

On ressort du cadre du *Hedging Numéraire* à l'aide des formules d'équivalences explicitées plus haut :

$$\theta_t^*(x) = \theta_t^{MNI}(a^{HN}) - a_t^{HN} [V_t(x, \theta^*) - (\eta_t^{MNI}(a^{HN}) + \theta_t^{MNI}(a^{HN})L_t)].$$

**Remarque :** La détermination de  $\phi^{MNI}(a^{HN}) = (\eta^{MNI}(a^{HN}), \theta^{MNI}(a^{HN}))$  n'est pas unique car

$$\int_0^T \phi_t^{MNI}(a^{HN})' dX_t(a^{HN}) = \int_0^T \left[ \eta_t^{MNI}(a^{HN}) d\left(\frac{1}{N}\right)_t + \theta_t^{MNI}(a^{HN}) d\left(\frac{L}{N}\right)_t \right].$$

Or  $\frac{1}{N}$  et  $\frac{L}{N}$  sont liés au même mouvement brownien,  $W_L$ . Du coup,

$\phi^{MNI}(a^{HN}) = (\eta^{MNI}(a^{HN}), \theta^{MNI}(a^{HN}))$  se choisit parmi un espace affine de solutions. En fait, on peut montrer (mais nous ne le ferons pas ici) que le choix de la stratégie bidimensionnelle dans cet espace affine n'influe pas sur la stratégie optimale ni sur la valeur du portefeuille associé.

Du fait de cette remarque, on peut poser  $\eta^{MNI}(a^{HN}) = 0$ . Par conséquent on écrit :

$$\forall 0 \leq t \leq T, \theta_t^{MNI}(a^{HN}) = \frac{\partial}{\partial \bar{L}_t} \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} \right], \text{ où } \bar{L} = \frac{L}{N}.$$

Un dernier calcul nous donne l'expression de la stratégie optimale :

$$\theta_t^*(x) = \theta_t^{MNI}(a^{HN}) - a_t^{HN} [V_t(x, \theta^*) - \theta_t^{MNI}(a^{HN}) L_t] = \left( \frac{\partial \bar{L}_t}{\partial L_t} \right)^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial L_t} \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} \right] \right) (1 + a_t^{HN} L_t) - a_t^{HN} V_t(x, \theta^*)$$

Or on rappelle que

$$a_t^{HN} = -\frac{1}{N_t} \frac{\partial N_t}{\partial L_t} \text{ et } \frac{\partial \bar{L}_t}{\partial L_t} = \frac{1}{N_t} - \frac{L_t}{N_t^2} \frac{\partial N_t}{\partial L_t} = \frac{1}{N_t} (1 + a_t^{HN} L_t).$$

De plus,

$$\mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} \right] = \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)] \times \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{1}{N_T} \right] = \frac{1}{N_t} \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)],$$

étant donné que  $\frac{d\bar{\mathbf{P}}}{d\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} = \frac{1}{N_T}$  et que  $\frac{1}{N}$  est une  $\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})$ -martingale.

Ainsi :

$$\theta_t^*(x) = N_t \frac{\partial}{\partial L_t} \left( \frac{\mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]}{N_t} \right) - a_t^{HN} V_t(x, \theta^*) = \frac{\partial \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]}{\partial L_t} + a_t^{HN} [\mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)] - V_t(x, \theta^*)],$$

et ceci conclut la preuve du théorème. ■

**Remarque :** Cette fois, la stratégie d'investissement affiche une dépendance en  $x$ . Si la mesure historique  $\mathbf{P}$  est une mesure de probabilité risque neutre, alors le hedging numéraire est le processus constant égal à 1 et  $a^{HN} = 0$ . On retrouve alors bien l'expression de la stratégie optimale que nous avons explicitée dans le cas simple.

### c. Point de variance minimale et frontière efficiente.

#### Point de variance minimale

**Définition (point de variance minimale) :** Le point de variance minimale est la stratégie d'investissement  $\theta^{**} \in \Theta$ , solution du programme  $\min_{\theta \in \Theta} \mathbf{Var}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(0, \theta)]$ .

Le théorème suivant détermine le point de variance minimale.

**Théorème : (Point de variance minimale)** Le point de variance minimale est déterminé par

$$\theta_t^{**} = \frac{\partial \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]}{\partial L_t} + a_t^{HN} [\mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)] - V_t(x^{**}, \theta^{**})] \text{ avec } x^{**} = \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)].$$

*Preuve*

Cette preuve s'articule en deux parties. On montre tout d'abord que résoudre le programme  $\min_{\theta \in \Theta} \mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(0, \theta))$  revient à résoudre  $\min_{(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2$ . Ensuite, on montre que  $(\theta^{**}, x^{**})$  est bien solution du programme  $\min_{(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2$ .

Pour ce qui est du premier temps, on a :

$$\begin{aligned} \min_{\theta \in \Theta} \mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(0, \theta)) &= \min_{m \in \mathbb{R}} \min_{\theta \in \Theta(m)} \mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(0, \theta)) \\ &= \min_{m \in \mathbb{R}} \min_{\theta \in \Theta(m)} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(m, \theta)]^2, \\ &\geq \min_{(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2 \end{aligned}$$

Pour établir l'autre inégalité, notons  $(\theta^0, x^0)$  la solution du programme  $\min_{(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2$  (pour l'instant, on ne sait pas encore que c'est  $(\theta^{**}, x^{**})$ ).

Montrons que  $\theta^0$  résout aussi  $\min_{\theta \in \Theta} \mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(0, \theta))$ . Par l'absurde, on se donne  $\tilde{\theta}$  telle que  $\mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(0, \tilde{\theta})) < \mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(0, \theta^0))$ .

Alors, on a :

$$\mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(0, \tilde{\theta})) < \mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(0, \theta^0)) = \mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(x^0, \theta^0)).$$

En posant  $\tilde{x} = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(0, \tilde{\theta})] - \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x^0, \theta^0)]$ , on obtient

$$\mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(\tilde{x}, \tilde{\theta})) = \mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(0, \tilde{\theta})) < \mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(x^0, \theta^0)),$$

avec  $\mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(\tilde{x}, \tilde{\theta})] = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x^0, \theta^0)]$ .

Ainsi :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ (MNI(T) - V_T(\tilde{x}, \tilde{\theta}))^2 \right] - \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ (MNI(T) - V_T(x^0, \theta^0))^2 \right] \\ &< \left( \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(\tilde{x}, \tilde{\theta})] \right)^2 - \left( \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x^0, \theta^0)] \right)^2 = 0 \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Cela établit bien que  $\min_{\theta \in \Theta} \mathbf{Var}^{\mathbf{P}}(MNI(T) - V_T(0, \theta)) = \min_{(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2$ .

Montrons désormais que  $(\theta^{**}, x^{**})$  est solution de  $\min_{(\theta, x) \in \Theta \times \mathbb{R}} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [MNI(T) - V_T(x, \theta)]^2$ .

En revenant au cadre du hedging numéraire, à l'aide des notations précédemment définies, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ MNI(T) - \left( x + \int_0^T \theta_u dL_u \right) \right]^2 &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ MNI(T) - N_T \left( x + \int_0^T \phi_u(a^{HN})' dX_u(a^{HN}) \right) \right]^2 \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{P}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} - \left( x + \int_0^T \phi_u(a^{HN})' dX_u(a^{HN}) \right) \right]^2 \times \mathbf{E}^{\mathbf{P}} [N_T^2] \end{aligned}$$

où on rappelle que  $\frac{d\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})}{d\mathbf{P}} = \frac{N_T^2}{\mathbf{E}[N_T^2]}$  et  $\phi(a^{HN})$  est la stratégie (bidimensionnelle) d'investissement dans l'actif  $\left(\frac{1}{N}, \frac{L}{N}\right) = X(a^{HN})$  correspondant à la stratégie  $\theta$  d'investissement dans l'actif  $L$ .

Rappelons également la décomposition de Kunita-Watanabe de  $H$  sous  $\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})$ , donnant :

$$\frac{MNI(T)}{N_T} = \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} \right] + \int_0^T \phi_t^H(a^{HN})' dX_t(a^{HN}) + R_T^H(a^{HN}).$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} - \left( x + \int_0^T \phi_u(a^{HN})' dX_u(a^{HN}) \right) \right]^2 &= \left( \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} \right] - x \right)^2 \\ &+ \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \int_0^T (\phi_u^{MNI}(a^{HN}) - \phi_u(a^{HN}))' d\langle X(a^{HN}) \rangle_u (\phi_u^{MNI}(a^{HN}) - \phi_u(a^{HN})) \right] \\ &+ \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} [R_T^{MNI}(a^{HN})]^2 \end{aligned}$$

Finalement, le couple  $(x^{**}, \phi^{**}(a^{HN}))$  minimisant l'écart quadratique

$$\mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} - \left( x + \int_0^T \phi_u(a^{HN})' dX_u(a^{HN}) \right) \right]^2 \text{ est donné par}$$

$$x^{**} = \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} \right] = \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [H] \text{ et } \phi^{**}(a^{HN}) = \phi^{MNI}(a^{HN}).$$

D'après un raisonnement et des notations tout à fait similaires à la preuve du théorème précédent, la donnée de  $\phi^{**}(a^{HN}) = \phi^{MNI}(a^{HN})$  et de  $x^{**} = \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]$  dans le cadre du *Hedging Numéraire* correspond à la donnée de la stratégie :

$$\theta_t^{**} = \theta_t^{MNI}(a^{HN}) - a_t^{HN} [V_t(x^{**}, \theta^{**}) - \theta_t^{MNI}(a^{HN})L_t],$$

toujours avec  $x^{**} = \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]$  et  $\forall 0 \leq t \leq T, \theta_t^{MNI}(a^{HN}) = \frac{\partial}{\partial L_t} \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}(a^{HN})} \left[ \frac{MNI(T)}{N_T} \right]$ .

On en déduit alors :

$$x^{**} = \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)] \text{ et } \theta_t^{**} = \frac{\partial \mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]}{\partial L_t} + a_t^{HN} [\mathbf{E}_t^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)] - V_t(x^{**}, \theta^{**})],$$

ce qui achève la preuve. ■

**Corollaire : (niveau de rendement au point de variance minimale)** Le niveau de rendement au point de variance minimale est :

$$m^{**} = x^{**} = \mathbf{E}^{\bar{\mathbf{P}}} [MNI(T)]$$

*Preuve*

Nous venons d'établir que la fonction de  $\varepsilon$  suivante :

$$f(\varepsilon) = \mathbf{E}^P \left[ MNI(T) - V_T(\varepsilon + x^{**}, \theta^{**}) \right]^2$$

était minimale en  $\varepsilon = 0$ .

Cette fonction est un polynôme de degré 2 en  $\varepsilon$  qui s'écrit par ailleurs

$$f(\varepsilon) = \mathbf{E}^P \left[ MNI(T) - V_T(x^{**}, \theta^{**}) \right]^2 - 2\varepsilon \mathbf{E}^P \left[ MNI(T) - V_T(x^{**}, \theta^{**}) \right] + \varepsilon^2.$$

Le minimum de cette fonction est alors atteint en  $\varepsilon = \mathbf{E}^P \left[ MNI(T) - V_T(x^{**}, \theta^{**}) \right] = 0$ , d'où le résultat. ■

### Frontière efficiente

**Définition (Frontière efficiente) :** La frontière efficiente est l'ensemble des points  $(\sigma^*(m), m)$ ,  $m$  variant, avec  $(\sigma^*(m))^2 = \min_{\theta \in \Theta(m)} \mathbf{Var}^P [MNI(T) - V_T(0, \theta)]$ .

Le théorème suivant décrit précisément cette frontière efficiente.

### **Théorème (Equation de la Frontière efficiente) :**

1 - La frontière efficiente du problème  $\min_{\theta \in \Theta(m)} \mathbf{Var}^P [MNI(T) - V_T(0, \theta)]$ , lorsque le niveau de rendement attendu  $m$  varie, est donnée par :

$$(\sigma^*(m))^2 = (\sigma^{**})^2 + \frac{\mathbf{E}^P [N_T]}{1 - \mathbf{E}^P [N_T]} (m - m^{**})^2,$$

où  $m^{**}$  et  $(\sigma^{**})^2$  sont respectivement le rendement et la variance au point de variance minimale et  $(\sigma^*(m))^2$  est la variance à l'optimum, pour le niveau de rendement  $m$ .

2 - Plus précisément, la stratégie optimale  $\theta^*(m)$ , solution de  $\min_{\theta \in \Theta(m)} \mathbf{Var}^P [MNI(T) - V_T(0, \theta)]$  pour un niveau de rendement  $m$ , se détermine à partir du point de variance minimale  $\theta^{**}$  par :

$$\theta_t^*(m) = \theta_t^{**} - a_t^{HN} N_t \frac{m - m^{**}}{1 - \mathbf{E}^P [N_T]}.$$

### *Preuve*

Commençons par établir le point 2-. Soit un niveau d'investissement initial  $x$ . On sait alors que la valeur du portefeuille à l'optimum et à chaque date intermédiaire  $t$ , est donnée par :

$$V_t(x, \theta^*(x)) = x + \int_0^t \theta_u^*(x) dL_u = N_t \left( x + \int_0^t \phi_u^{MNI}(a^{HN})' dX_u(a^{HN}) \right).$$

D'autre part, au point de variance minimale, on a :

$$V_t(x^{**}, \theta^{**}) = x^{**} + \int_0^t \theta_u^{**}(x) dL_u = N_t \left( x^{**} + \int_0^t \phi_u^{MNI}(a^{HN})' dX_u(a^{HN}) \right).$$

Ainsi, à la date finale, on a :

$$\mathbf{E}^P [MNI(T) - V_T(0, \theta^*(x))] - \mathbf{E}^P [MNI(T) - V_T(0, \theta^{**})] = (1 - \mathbf{E}^P [N_T]) (x - x^{**}).$$

Donc le niveau de rendement  $m$  attendu à l'optimum, pour le niveau d'investissement initial  $x$ , vérifie :

$$m - m^{**} = (1 - \mathbf{E}^P [N_T]) (x - x^{**}).$$

Si on suppose, ce qui est le cas général, que  $\mu_L \neq 0$ , c'est-à-dire  $\mathbf{E}^P[N_T] \neq 1$ , alors la dernière relation et la proposition de la section 3.a de cette annexe nous permettent d'affirmer que toute stratégie solution du problème A est solution du problème B pour un certain investissement initial donné par la relation précédente. Ainsi, on note  $\theta_t^*(m)$  ou  $\theta_t^*(x)$  suivant qu'on se trouve respectivement dans le problème A ou le problème B.

On a alors :

$$\frac{\partial \theta_t^*(m)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial V_t^*(x, \theta_t^*(m))}{\partial L_t} \right) = \frac{\partial}{\partial L_t} \left( \frac{\partial V_t^*(x, \theta_t^*(m))}{\partial x} \right) = \frac{\partial N_t}{\partial L_t} = -a_t^{HN} N_t.$$

En intégrant cette relation, on en déduit :

$$\theta_t^*(m) - \theta_t^{**} = -a_t^{HN} N_t (x - x^{**}),$$

puis :

$$\theta_t^*(m) = \theta_t^{**} - \frac{a_t^{HN} N_t}{1 - \mathbf{E}^P[N_T]} (m - m^{**}),$$

ce qui établit le point 2-.

A présent, occupons-nous du point 1-. On a :

$$\begin{aligned} (\sigma^*(m))^2 &= \mathbf{Var}^P \left[ MNI(T) - \int_0^T \theta_u^*(m) dL_u \right] \\ &= \mathbf{Var}^P \left[ MNI(T) - \int_0^T \theta_u^{**} dL_u \right] - 2 \mathbf{Cov}^P \left[ MNI(T) - \int_0^T \theta_u^{**} dL_u; \frac{m - m^{**}}{1 - \mathbf{E}^P[N_T]} N_T \right] \\ &\quad + \left( \frac{m - m^{**}}{1 - \mathbf{E}^P[N_T]} \right)^2 \mathbf{Var}^P[N_T] \end{aligned}$$

Pour ce qui est du terme de covariance, on a :

$$\mathbf{E}^P \left[ \left( MNI(T) - \int_0^T \theta_u^{**} dL_u \right) N_T \right] = \mathbf{E}^P[N_T] \times \mathbf{E}^{\bar{P}} \left[ MNI(T) - \int_0^T \theta_u^{**} dL_u \right] = m^{**} \mathbf{E}^P[N_T],$$

d'après le corollaire précédent, ce qui donne

$$\mathbf{Cov}^P \left[ MNI(T) - \int_0^T \theta_u^{**} dL_u; N_T \right] = 0.$$

De plus, sachant que  $\mathbf{E}^P[N_T^2] = \mathbf{E}^P[N_T]$  (car  $\mathbf{E}^P[N_T^2] = \mathbf{E}^P[N_T] \times \mathbf{E}^{\bar{P}}[N_T] = \mathbf{E}^P[N_T]$ ), on a  $\mathbf{Var}^P[N_T] = \mathbf{E}^P[N_T](1 - \mathbf{E}^P[N_T])$ .

On en déduit alors la relation du théorème :

$$(\sigma^*(m))^2 = (\sigma^{**})^2 + \frac{\mathbf{E}^P[N_T]}{1 - \mathbf{E}^P[N_T]} (m - m^{**})^2,$$

ce qui achève la preuve. ■

## Annexe C : Estimation des paramètres de modèle sur différents marchés (encours de dépôts et taux de rémunération) (Partie III)

### 1. Estimations des paramètres du modèle de diffusion des encours

Les données utilisées pour les chiffres présentés dans les tableaux ci-dessous proviennent des sites des banques centrales et concernent des agrégats monétaires ou certains de leurs composants.

Market	Monetary aggregate	Estimation period	$\mu_K$	$\sigma_K$
US	M1 - Overnight Demand Deposits	Nov. 1986 - Sept. 2007 (251)	0.29%	5.84%
US	M1 - Overnight and Checkable Deposits	Nov. 1986 - Sept. 2007 (251)	0.78%	3.95%
US	M2 (excluding currency in circulation)	Nov. 1986 - Sept. 2007 (251)	0.56%	0.14%
Euro	M1 - Overnight Demand Deposits of Enterprises and Households	Sept. 1997 - Sept. 2007 (121)	10.19%	6.56%
Euro	M2 - Total Deposits of Enterprises and Households	Jan. 1999 - Sept. 2007 (105)	6.27%	2.32%
Japan	M2 - Current and Ordinary Accounts + Savings and Installment deposits + Time deposits <2Y	Apr. 1999 - Aug. 2007 (101)	2.83%	2.26%

**Tableau C.1. Estimation des paramètres pour les USA, la Zone Euro et le Japon.** Les données utilisées sont des données d'agrégats monétaires, disponibles sur les sites des banques centrales. Les paramètres de tendance et de volatilité sont exprimés en base annuelle.

Market	Monetary aggregate	Estimation period	$\mu_K$	$\sigma_K$
<b>Euro</b>	<b>M1 - Overnight Demand Deposits of Enterprises and Households</b>	<b>Sept. 1997 - Sept. 2007 (121)</b>	<b>10.19%</b>	<b>6.56%</b>
France	M1 - Overnight Demand Deposits of Households	Jan. 1999 - Aug. 2007 (104)	5.93%	5.77%
Germany	M1 - Overnight Demand Deposits of Enterprises and Households	Jan. 1999 - Sept. 2007 (105)	8.00%	6.71%
<b>Euro</b>	<b>M2 - Total Deposits of Enterprises and Households</b>	<b>Jan. 1999 - Sept. 2007 (105)</b>	<b>6.27%</b>	<b>2.33%</b>
Germany	M2 - Total Demand Deposits of Enterprises and Households	Jan. 1999 - Sept. 2007 (105)	3.21%	1.63%

**Tableau C.2. Estimation des paramètres pour les dépôts à vue dans certains pays de la Zone Euro.**

Market	Monetary aggregate	Estimation period	$\mu_K$	$\sigma_K$
Turkey	M1 (except currency in circulation)	Jan. 1986 - Oct. 2007 (262)	51.74%	37.38%
Turkey	M2	Jan. 1986 - Oct. 2007 (262)	47.95%	13.40%
Ukraine	M1	Jan. 1996 - Sept. 2007 (141)	32.05%	13.89%
Ukraine	M2	Jan. 1996 - Sept. 2007 (141)	34.53%	10.05%

**Tableau C.3. Estimation des paramètres pour les agrégats monétaires sur des marchés émergents (Turquie, Ukraine).**

## 2. Estimations du paramètre de corrélation

L'estimation du paramètre de corrélation porte sur certaines composantes de l'agrégat M1. L'estimateur du paramètre de corrélation sur M2 n'est en général pas significatif : cela peut s'expliquer par le fait que les effets d'arbitrage ont d'ordinaire lieu entre des éléments de M1 (dépôts à vue pas ou peu rémunérés) et des éléments de M2-M1 (comptes d'épargne rémunérés et dépôts à terme de courte maturité).

Market	Monetary Aggregate	Related Market Rate	Estimation period	$\sigma_L$	$\sigma_K$	$\rho$
Euro	M1 - Overnight Demand Deposits of Enterprises and Households	Euribor 3M	Jan. 1999 - Sept. 2007 (105)	15.42%	6.56%	-65.37%
US	M1 - Overnight and Checkable Deposits	USD Libor 3M	Nov. 1986 - Sept. 2007 (251)	19.00%	3.95%	-21.60%
US	M1 - Overnight Demand Deposits	USD Libor 3M	Nov. 1986 - Sept. 2007 (251)	19.00%	5.84%	-11.25%

**Tableau C.4. Estimation du paramètre de corrélation aux USA et dans la Zone Euro.**

Market	Monetary Aggregate	Related Market Rate	Estimation period	$\sigma_L$	$\sigma_K$	$\rho$
Euro	M1 - Overnight Demand Deposits of Enterprises and Households	Euribor 3M	Jan. 1999 - Sept. 2007 (105)	15.42%	6.56%	-65.37%
France	M1 - Overnight Demand Deposits of Households	Euribor 3M	Jan. 1999 - Aug. 2007 (104)	15.42%	5.77%	-46.47%
Germany	M1 - Overnight Demand Deposits of Enterprises and Households	Euribor 3M	Jan. 1999 - Sept. 2007 (105)	15.42%	6.71%	-78.18%

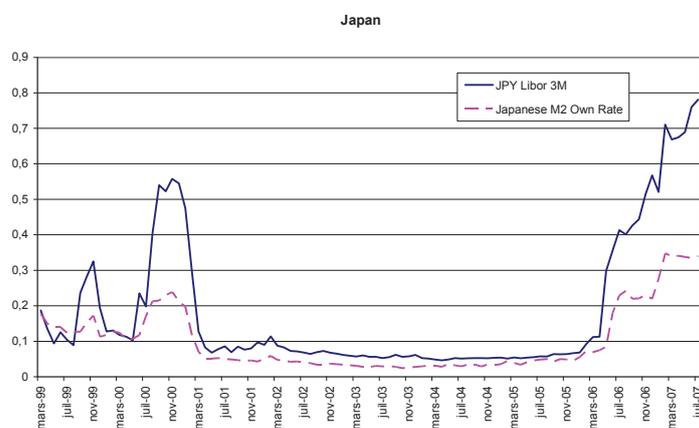
**Tableau C.5. Estimation du paramètre de corrélation dans des pays de la Zone Euro.**

## 3. Modélisation du taux de rémunération des ressources

Market	Monetary Aggregate	Related Interest Rate	Estimation period	$\alpha$ (Intercept)	$\beta$ (Market Rate)	R <sup>2</sup>
US	M2 (excluding currency in circulation)	USD Libor 3M	Nov. 1986 - Sept. 2007 (251)	-0.41%	0.66	86%
Euro	M2 - Total Deposits of Enterprises and Households	Euribor 3M	Jan. 2003 - Sept. 2007 (57)	0.46%	0.69	96%

**Tableau C.6. Estimation d'un modèle affine pour les taux de rémunération aux USA et dans la Zone Euro.**

Pour le cas des dépôts japonais, la Figure C.7 ci-dessous montre qu'entre mi-2001 et début 2006, les taux client sur des dépôts d'ordinaire rémunérés étaient quasiment nuls, en raison de taux de marchés trop bas.



**Figure C.7. Taux de rémunération moyen des dépôts à vue et taux de marché japonais.** Source *Bank of Japan*.

Ainsi, comme suggéré dans le corps du rapport de thèse, nous proposons d'estimer le modèle suivant pour le taux de rémunération  $r_d(t)$  :

$$r_d(t) = \mathbf{1}_{L_t < 0.08\%} (a_1 + b_1 L_t) + \mathbf{1}_{L_t > 0.08\%} (a_2 + b_2 L_t) + \varepsilon_t.$$

Les estimations contenues dans le Tableau C.8 montrent en effet que les coefficients  $a_1$  et  $b_1$  sont assez largement peu significatifs.

Explanatory Variable		Coefficient	Standard Error	T-statistic	P-value
<b>When Libor Rate &lt; 0,08%</b>	<b>Intercept</b>	<i>0.004</i>	0.027	0.17	87%
	<b>3M Libor Rate</b>	<i>0.546</i>	0.444	1.23	22%
<b>When Libor Rate &gt; 0,08%</b>	<b>Intercept</b>	0.045	0.006	7.89	<<1%
	<b>3M Libor Rate</b>	0.387	0.015	25.24	<<1%

**Tableau C.8. Modélisation du taux de rémunération japonais.** Les lignes correspondant à « *when Libor rate < 0,08%* » concernent les coefficients  $a_1$  et  $b_1$ . En italique, nous avons indiqué les coefficients non significatifs à un seuil de 5%.

## Annexe D : Données issues des rapports par établissement à la *Securities and Exchange Commission* (Partie III)

L'objet de cette annexe est une étude des sensibilités affichées par les établissements bancaires américains dans les rapports qu'ils sont tenus de faire parvenir à la SEC à une fréquence trimestrielle. L'idée est d'étudier le pouvoir anticipatif des indicateurs de sensibilité *ex ante* sur les variations de marge effectivement observées *ex post*.

Les données sont donc issues des rapports annuels (10-K) et trimestriels (10-Q) que les établissements font parvenir à la SEC. Ces rapports contiennent des informations précises sur les éléments composant le bilan, les conditions de marché, quelques indicateurs relatifs au risque de marché, le cours de l'action et autres informations sur l'établissement (composition de l'actionnariat, etc.). A partir des rapports publiés par la SEC<sup>45</sup>, nous avons pu reconstituer un historique des marges nettes d'intérêt réalisées et des indicateurs de sensibilité calculés par chaque établissement.

Les indicateurs d'exposition au risque de marché comprennent notamment des indicateurs de sensibilité de la marge nette de taux d'intérêt à horizon 1 an, calculés par rapport à des scénarios de chocs graduels de 200bps sur les taux d'intérêt pendant l'année à suivre. Ce procédé semble identique d'un établissement à l'autre, laissant supposer une exigence réglementaire sous jacente.

### 1. Statistiques descriptives de l'échantillon choisi

Le tableau suivant contient la composition de l'échantillon de banques choisi. Ces établissements sont relativement proches en ce qui concerne la taille de leur bilan et leur implication dans l'activité de détail. Pour quantifier cette dernière notion, nous avons choisi de retenir le nombre d'agences présentes sur le territoire des USA.

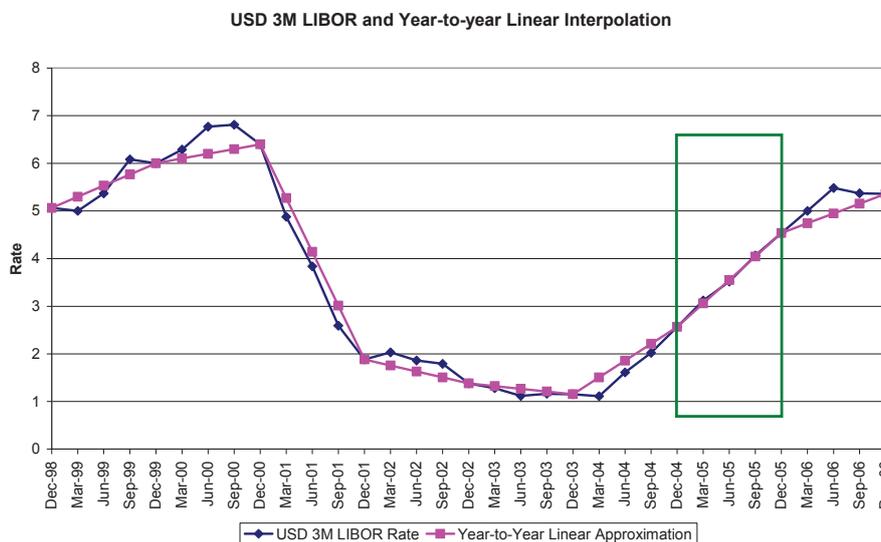
Name	Code	Number of Agencies	Asset Size (M\$)	Net income (2005) (M\$)
SunTrust Bank	ATLANTA , GA	1 711	174 962	3 685
HSBC Bank USA, National Association	WILMINGTON , DE	453	166 101	7 802
National City Bank	CLEVELAND , OH	1 363	135 636	4 433
Branch Banking and Trust Company	WINSTON SALEM , NC	1 473	120 906	3 348
PNC Bank, National Association	PITTSBURGH , PA	1 055	117 232	1 969
Capital One, National Association	MCLEAN , VA	695	95 204	3 003
Comerica Bank	DETROIT , MI	394	58 088	1 810
Bank of the West	SAN FRANCISCO , CA	663	56 963	1 352
Manufacturers and Traders Trust Company	BUFFALO , NY	637	56 713	1 735
The Huntington National Bank	COLUMBUS , OH	710	54 186	911
Fifth Third Bank	CINCINNATI , OH	408	53 249	3 048
Union Bank of California, National Association	SAN FRANCISCO , CA	320	52 743	1 624
M&I Marshall and Ilsley Bank	MILWAUKEE , WI	290	49 334	1 132
Commerce Bank, National Association	PHILADELPHIA , PA	405	43 053	497
TD BankNorth, National Association	PORTLAND , ME	587	42 368	927
First Tennessee Bank, National Association	MEMPHIS , TN	262	38 178	856
Compass Bank	BIRMINGHAM , AL	415	36 914	780
Colonial Bank, National Association	MONTGOMERY , AL	321	23 325	567
Associated Bank, National Association	GREEN BAY , WI	310	20 312	553
Webster Bank, National Association	WATERBURY , CT	179	16 622	468

Tableau D.1. Statistiques descriptives de l'échantillon.

<sup>45</sup> Les rapports sont répertoriés sur le site Internet de la SEC (<http://www.secinfo.com>).

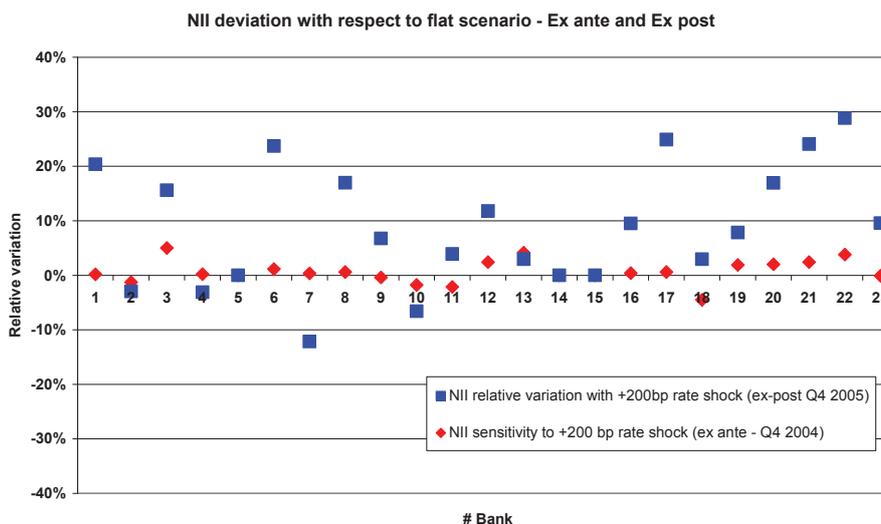
## 2. Pouvoir prédictif des sensibilités *ex ante*

Pour évaluer le pouvoir prédictif que nous évoquions en introduction à cette annexe, nous considérons une année où les taux de marché ont effectivement réalisé une hausse graduelle de 200bps afin de coller au mieux aux scénarios dans lesquels les sensibilités ont été calculées. Le graphique D.2 ci-dessous montre que ce fut le cas de l'année 2004-2005.



**Graphique D.2. Taux Libor 3M et interpolation linéaire d'une année sur l'autre.** On remarque effectivement que l'année 2005 (fenêtre encadrée) correspond à une année de montée graduelle du taux Libor 3M de quasiment 200bps.

Le graphique suivant montre, pour chaque établissement, la variation relative de sa marge réalisée sur l'année 2005 (*ex post*) par rapport à l'anticipation qu'il s'en faisait (selon son scénario de taux « central ») et ce qui était anticipé au travers de l'indicateur de sensibilité affiché dans le rapport de janvier 2005.



**Graphique D.3. Variation relative de marge : *ex post* / *ex ante*, établissement par établissement.**

En effectuant une régression de la variation relative observée sur la variation relative anticipée, on obtient le tableau suivant :

	<b>Intercept (Standard Deviation)</b>	<b>Ex-ante Relative Variation (StDev)</b>	<b>R<sup>2</sup></b>	<b>F-statistic (Critic Value)</b>
<b>Ex-post Relative Variation</b>	8.32% (2.43%)	<b>1.37</b> <b>(1.05)</b>	29%	1.72 (0.21)

**Tableau D.4. Régression de la variation relative ex post sur son anticipation.**

Le coefficient de 1,37, malgré sa faible significativité (écart type de 1.05), montre que les sensibilités affichées par les établissements ont tendance à bien estimer le sens de variation de leur marge nette d'intérêt à venir, mais à en sous-évaluer l'ampleur.

Par ailleurs, la faiblesse du R<sup>2</sup> confirme qu'une sensibilité aux seuls taux d'intérêt ne suffit pas à prévoir les mouvements subis par les marges. L'indicateur ne peut en effet pas prendre en compte d'éventuelles modifications de l'environnement réglementaire, de la politique commerciale de l'établissement, d'éventuelles fusions, autant d'éléments que nous regroupons sous l'appellation « risque de business ».

Néanmoins on peut sans doute expliquer la relative faiblesse du pouvoir prédictif des indicateurs de sensibilité calculés, notamment par celle de leur processus de calcul : un choc graduel et parallèle de 200 bps sur la courbe des taux ne suffit sans doute pas à simuler toutes les distorsions du marché.



## **Résumé – Mesure du risque et couverture des marges nettes de taux d'intérêt sur les ressources non échéancées – Application aux dépôts à vue en ALM bancaire.**

Cette thèse traite de la gestion du risque de taux sur les marges nettes d'intérêt dégagées par les banques sur la partie des ressources non échéancées (dépôts à vue, comptes d'épargne liquide, etc.). Dans un premier temps, nous nous intéressons au problème de la mesure du risque, à travers une revue des mesures connues à ce jour ainsi qu'un certain nombre de résultats de représentation associés. Par ailleurs, notre application au problème d'optimisation de portefeuille montre une certaine robustesse des allocations optimales par rapport au choix du critère. Enfin, nous plaçons la gestion des ressources évoquées par un cadre de marché incomplet : nous considérons que les encours de ressources, en plus d'une contingence aux taux de marché, sont porteurs d'un risque spécifique, lié par exemple au comportement de la clientèle. Ainsi nous montrons qu'une couverture dynamique des marges semble plus performante que la plupart des stratégies développées à l'heure actuelle, tout en présentant une certaine robustesse par rapport au choix de la mesure de risque.

## **Summary – Risk measures and hedging interest rate margins on non maturing liabilities – The case of demand deposits in banking ALM.**

This thesis deals with interest rate risk management on interest rate margins related to non maturing liabilities (demand deposits, savings, etc.). First, we propose a focus on risk measurement, through a review of some well-known risk measures and some related representation results. Besides, our application to portfolio optimization exhibits some robustness of efficient allocations with respect to the choice of the measure. Finally, we propose to consider the management of non maturing liabilities in an incomplete market framework. Indeed, the amount of liabilities may carry some specific risk, independent from market risk, corresponding to customers' behaviour, for instance. Then we show that, in a mean-variance framework, dynamic hedging strategies for margins appear to be more efficient than most of strategies currently in use. They also display satisfactory performances when switching to other risk measures.

## **Discipline – Sciences de Gestion**

**Mots-Clés** – Gestion actif-passif ; Risque de taux d'intérêt ; Dépôts à vue ; Marge nette de taux d'intérêt ; Couverture quadratique ; Expected Shortfall ; Mesures spectrales de risque ; Mesures de distorsion ; Optimisation de portefeuille.

**Keywords** – Asset and liability management; Demand deposits; Interest-rate risk; Interest-rate margin; Mean-variance hedging; Expected Shortfall; Distortion risk measures; Spectral risk measures; Portfolio selection.

Ecole Doctorale de Sciences Economiques et Sciences de Gestion (Management Information Finance) : Manufacture des Tabacs – 6, cours Albert Thomas – 69008 LYON – France